

**CẤU TRÚC CHƯƠNG TRÌNH,
CẤU TRÚC ĐỀ THI TUYỂN SINH THPT NĂM HỌC 2026-2027**

MÔN THI: TOÁN CHUYÊN, TOÁN TIN, TOÁN NGA-PHÁP-TRUNG

**I. CẤU TRÚC CHƯƠNG TRÌNH MÔN TOÁN TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
CHUYÊN TOÁN, CHUYÊN TIN**

STT	Nội dung (Mạch kiến thức/Chủ đề)	Yêu cầu cần đạt
1.	Đại số 1 (3,0 điểm): - Phương trình, Hệ phương trình quy về bậc nhất, bậc hai; - Hàm số và đồ thị (Hàm số bậc nhất, bậc hai) - Tìm đa thức, tính chất của đa thức; - Biểu thức đại số - Bài toán áp dụng thực tiễn, mô hình hóa.	- Biết giải các PT, HPT - Nắm các tính chất cơ bản của hàm số - Biết tìm đa thức, hiểu cấu trúc nghiệm, hệ số của một đa thức - Biết chứng minh các đẳng thức, biết tính toán giá trị biểu thức - Biết chuyển mô hình hóa các bài toán thực tế.
2.	Đại số 2 (1,5 điểm): - Bất đẳng thức; - Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức.	- Biết chứng minh bất đẳng thức. - Biết tìm GTLN, GTNN.
3.	Số học (1,5 điểm): - Lý thuyết chia hết trên tập số nguyên; - Tìm số nguyên tố, hợp số, số chính phương; - Phương trình nghiệm nguyên.	- Chứng minh được các tính chất chia hết trên tập số nguyên. - Biết giải phương trình nghiệm nguyên. - Biết tìm các số nguyên tố, hợp số, số chính phương.
4.	Hình học (3,0 điểm): - Chứng minh các tính chất hình học; các hệ thức hình học; - Tính toán trong hình học; - Điểm và đường cố định; Cực trị hình học.	- Biết chứng minh được các tính chất hình học. - Biết tính toán được các đại lượng hình học. - Biết tìm và chứng minh được yếu tố cố định, cực trị hình học.
5.	Tổ hợp xác suất (1,0 điểm): - Xác suất của biến cố - Nguyên lý Dirichlet; - Nguyên lý Bất biến; - Nguyên lý cực hạn; - Hình học tổ hợp; bảng vuông; tư duy logic.	- Biết tính xác suất của biến cố. - Biết suy luận logic phát triển tư duy tổ hợp. - Biết sử dụng các nguyên lý trong tổ hợp.

II. CẤU TRÚC CHƯƠNG TRÌNH MÔN TOÁN TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TIẾNG NGA, PHÁP, TRUNG QUỐC (Dành cho thí sinh thi vào trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

STT	Nội dung (Mạch kiến thức/Chủ đề)	Yêu cầu cần đạt
1.	Đại số 1 (3,0 điểm): - Biến đổi, rút gọn biểu thức đại số. - Hàm số và đồ thị (Hàm số bậc nhất, bậc hai). - Phương trình bậc nhất và phương trình quy về phương trình bậc nhất; Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn; Bất phương trình bậc nhất một ẩn. - Bài toán áp dụng thực tiễn, mô hình hóa.	- Biết chứng minh các đẳng thức, biết tính toán giá trị biểu thức. - Nắm các tính chất cơ bản của hàm số. - Biết giải các Phương trình, Hệ phương trình, Bất phương trình. - Biết chuyển mô hình hóa các bài toán thực tế
2.	Xác suất, thống kê (1,5 điểm): - Xác suất của biến cố - Thống kê.	- Biết tính xác suất của biến cố - Thiết lập được bảng tần số, tần số tương đối
3.	Đại số 2 (1,5 điểm): - Biến đổi, rút gọn biểu thức đại số - Hàm số và đồ thị (Hàm số bậc nhất, bậc hai) - Phương trình bậc nhất và phương trình quy về phương trình bậc nhất; Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn; Bất phương trình bậc nhất một ẩn. Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai và định lý Viét. - Bài toán áp dụng thực tiễn, mô hình hóa.	- Biết chứng minh các đẳng thức, biết tính toán giá trị biểu thức. - Nắm các tính chất cơ bản của hàm số. - Biết giải các Phương trình, Hệ phương trình, Bất phương trình. Biết vận dụng định lý Viét. - Biết chuyển mô hình hóa các bài toán thực tế.
4.	Hình học (3,0 điểm): - Chứng minh các tính chất hình học; các hệ thức hình học; - Tính toán trong hình học; - Điểm và đường cố định; Cực trị hình học. - Các hình khối trong thực tiễn. - Hệ thức lượng trong tam giác vuông.	- Biết chứng minh được các tính chất hình học. - Biết tính toán được các đại lượng hình học - Biết tìm và chứng minh được yếu tố cố định, cực trị hình học. - Biết tính diện tích xung quanh, thể tích của các hình nón, trụ, cầu - Giải quyết được một số vấn đề trong thực tiễn gắn với tỉ số lượng giác của góc nhọn.

STT	Nội dung (Mạch kiến thức/Chủ đề)	Yêu cầu cần đạt
5.	Số học, Đại số 3 (1,0 điểm): - Bất đẳng thức; - Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức; - Lý thuyết chia hết trên tập số nguyên; - Tìm số nguyên tố, hợp số, số chính phương; - Phương trình nghiệm nguyên.	- Biết chứng minh bất đẳng thức - Biết tìm GTLN, GTNN - Chứng minh được các tính chất chia hết trên tập số nguyên - Biết tìm các số nguyên tố, hợp số, số chính phương. - Biết giải phương trình nghiệm nguyên.

III. DANH MỤC KHÁI NIỆM, KẾT QUẢ THÍ SINH MÔN TOÁN ĐƯỢC PHÉP SỬ DỤNG NHƯ KHÁI NIỆM, KẾT QUẢ SGK TRONG KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT (ĐỐI VỚI BÀI THI CÁC MÔN CHUYÊN):

Ngoài các kiến thức toán theo Chương trình phổ thông (từ lớp 1 đến lớp 9) hiện hành, các học sinh được phép sử dụng các khái niệm và kết quả dưới đây như khái niệm và kết quả SGK:

1. Phần đại số:

1.1. Bất đẳng thức (BDT):

- BDT Côsi (AM-GM) cho n số thực không âm (n là số nguyên lớn hơn 1).
- BDT Bunhiacôpxki (Cauchy-Schwarz) cho 2 bộ n số thực (n là số nguyên lớn hơn 1).

- BDT cộng mẫu: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \quad \forall a_i > 0.$

- BDT Mincôpxki: $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2},$ với mọi $a, b, x, y \in \mathbb{R}.$

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} + \sqrt{c^2 + z^2} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + (x+y+z)^2}, \quad \text{với mọi}$$

$$a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

- BDT cơ bản:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca; \quad (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca); \quad (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \quad \text{với}$$

$$\text{mọi } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

1.2. Đa thức:

- Định lí Bôdu về số dư trong phép chia một đa thức cho nhị thức bậc nhất $x - a.$

- Nếu $x_0 = \frac{p}{q} \ ((p, q) = 1)$ là nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{thì } p \text{ là ước của } a_0 \text{ và } q \text{ là ước của } a_n$$

- Định lý Viet thuận và đảo cho phương trình bậc 3.

2. Phần số học:

- Lý thuyết về đồng dư, tính chất cơ bản của đồng dư.
- Định lý Fermat nhỏ.

3. Phần hình học:

- Các hệ thức lượng trong tam giác vuông.
- Khái niệm đường tròn bàng tiếp tam giác.
- Khái niệm góc và công thức tính góc có đỉnh nằm trong, nằm ngoài đường tròn; góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung.
- Định lý Ceva và menelaus (đồng quy, thẳng hàng).
- Định lý Ptolêmê cho tứ giác nội tiếp.
- Tính chất về phương tích của một điểm với đường tròn:
“Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài (O) . Qua M kẻ hai cát tuyến MAB và MCD tới (O) . Khi đó ta có $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.”

Ngược lại nếu tứ giác $ABCD$ có AB cắt CD tại M và $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ thì suy ra tứ giác $ABCD$ nội tiếp”.

(Tương tự kết quả khi thay điểm M nằm trong đường tròn (O))

- Các dấu hiệu để tứ giác nội tiếp được một đường tròn (tổng hai góc đối bằng 180° ; góc ngoài bằng góc trong không kề nó; 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh đối diện góc bằng nhau; phương tích)
- Đường thẳng Euler, đường tròn Euler (đường tròn 9 điểm), đường thẳng Simson.
- Khái niệm và tính chất đường trung bình của hình thang.
- Bổ đề hình thang.

4. Phần tổ hợp xác suất:

- Nguyên lý Dirichlet: Nếu nhốt m con thỏ vào n cái chuồng (m, n là số nguyên dương) thì luôn tồn tại một chuồng chứa ít nhất $1 + \left\lceil \frac{m-1}{n} \right\rceil$ con thỏ.
- Nguyên lý Bất biến: Bất biến là những đại lượng (hay tính chất) không thay đổi trong quá trình chúng ta thực hiện các phép biến đổi.
- Nguyên lý cực hạn: Một tập hợp hữu hạn các số thực (khác rỗng) bất kỳ đều có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất.

ĐỀ THAM KHẢO

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Bác Hiếu chở một xe ô tô cây cảnh ra chợ để bán. Sau khi bán hết cây cuối cùng với giá 200 nghìn đồng, bác tính nhầm lại thấy mình đã bán số cây cảnh với giá trung bình là 245 nghìn đồng/cây. Nhưng ngay lúc ấy người mua cây cảnh cuối quay trở lại và chỉ cho bác Hiếu thấy cây vừa mua bị héo, nên ông ta chỉ đồng ý mua với giá 140 nghìn đồng. Bác Hiếu đã chấp thuận và bán cây cảnh đó. Khi nhầm tính lại, bác Hiếu thấy giá trung bình của số cây cảnh đã bán bây giờ là 242 nghìn đồng/cây. Hỏi, bác Hiếu đã bán được bao nhiêu cây cảnh?

b) Cho hai đa thức $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$, trong đó a, b, c, d là các hệ số. Tìm $f(6)$ biết $g(6) = 5$ và $\frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{3}{2}$.

c) Giải phương trình $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{x^3 + 3x}$.

Câu 2 (1,5 điểm). Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $2^a = b^c + 1$ và $a > 1$.

a) Chứng minh rằng b, c là các số lẻ.

b) Tìm tất cả các giá trị của c thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là ba số không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) = 2$.

a) Tìm giá trị lớn nhất của $P = abc$.

b) Chứng minh rằng $(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \leq 1$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với B, C cố định và A thay đổi sao cho $AB < AC$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC . Đường thẳng AJ cắt đường tròn (O) tại D , đường tròn đường kính JD cắt đường tròn (O) tại K , khác D .

a) Chứng minh rằng $DB = DI$ và D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC .

b) Gọi E là điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn (O) , đường thẳng JB cắt đường tròn (O) tại F . Chứng minh rằng EF song song với CJ .

c) Trên BK lấy điểm M sao cho $MB = MJ$. Chứng minh rằng đường thẳng JM luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Câu 5 (1,0 điểm). Xét 2026 số nguyên bất kì được xếp xung quanh một vòng tròn sao cho mỗi số đều lớn hơn tổng của hai số kế tiếp nó (theo chiều kim đồng hồ).

a) Chứng minh rằng trong 2026 số trên tồn tại số âm và có không quá 1013 số dương.

b) Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu số dương trong 2026 số nguyên thỏa mãn yêu cầu trên.

.....Hết.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

ĐỀ THAM KHẢO

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Tin)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Một người quản lí của một khu chung cư có 150 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng, tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 24$.

Tính giá trị của biểu thức sau: $P = 6(ab + bc + ca) - abc$.

c) Giải phương trình: $x + 11 + \sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 2\sqrt{2x + 3} + 7\sqrt{x + 1}$.

Câu 2 (1,5 điểm).

a) Chứng minh rằng $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ không chia hết cho 343 với mọi số nguyên $n \in \mathbb{Z}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, m, n sao cho m, n là hai số nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $(x^2 + y^2)^m = (xy)^n$.

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $6a + 3b + 2c = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$B = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{b^2 + 4}} + \frac{3}{\sqrt{c^2 + 9}}.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H với $D \in BC, E \in AC, F \in AB$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và H lên EF .

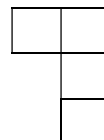
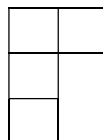
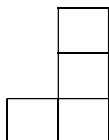
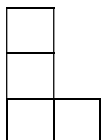
a) Chứng minh rằng AD là phân giác của góc $\widehat{EDF}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng AN đi qua trung điểm đoạn thẳng DM .

c) Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF cắt lại EF tại X (khác F), đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE cắt lại EF tại Y (khác E). Chứng minh rằng các đường thẳng BX, CY, HN đồng quy.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho bảng ô vuông 2026×2026 gồm 2026^2 ô vuông đơn vị. Chứng minh rằng:

a) Bảng ô vuông trên không thể lát được bởi các hình chữ L có dạng như dưới đây:



b) Nếu bảng ô vuông trên được chia thành m hình giống nhau gồm n ô vuông đơn vị thì bảng ô vuông đó cũng có thể được chia thành n hình giống nhau gồm m ô vuông đơn vị.

.....**Hết**.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

ĐỀ THAM KHẢO

(Đề thi gồm có 02 trang)

Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh thi dự thi vào lớp chuyên
Nga, Pháp, Trung)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{5}(\sqrt{5} + 1).$$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) (\sqrt{x} - 1) \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

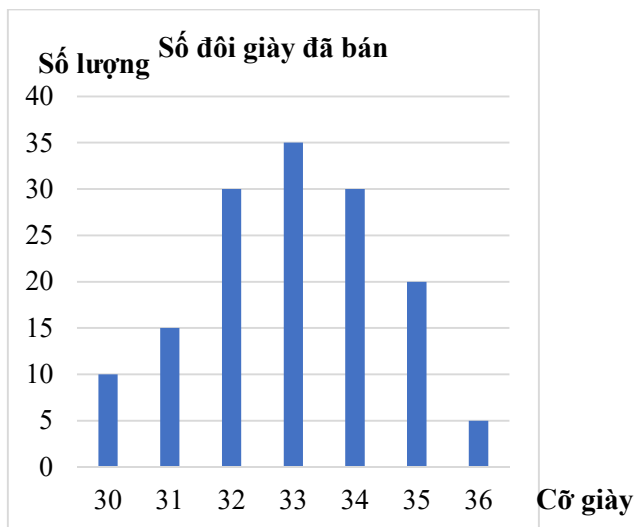
b) Bạn Hà có 200 nghìn đồng, bạn muốn mua một quyển truyện giá 35 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển giá 12 nghìn đồng. Hỏi bạn Hà có thể mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

c) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{y+1} = 3 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{1}{y+1} = 2 \end{cases}.$$

Câu 2 (1,5 điểm).

a) Biểu đồ bên dưới thống kê số đôi giày bán được của một cửa hàng giày trẻ em trong tháng 10/2025. Hỏi cửa hàng bán được bao nhiêu đôi giày trong tháng đó? Trong số giày đã bán có bao nhiêu đôi có cỡ không lớn hơn 34?



b) Một tổ có 6 học sinh gồm 4 học sinh nữ và 2 học sinh nam được giao chuẩn bị thuyết trình về một chủ đề bài học. Giáo viên chọn ngẫu nhiên hai bạn học sinh của nhóm để thuyết trình trước lớp. Tính xác suất của biến cố: “Hai bạn học sinh được chọn cùng giới”.

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Một cơ sở sản xuất lập kế hoạch làm 560 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do được bổ sung thêm nhân lực nên năng suất của cơ sở tăng thêm mỗi ngày 5 sản phẩm. Vì thế, cơ sở không những hoàn thành sớm hơn 1 ngày mà còn sản xuất vượt mức so với kế hoạch được 40 sản phẩm. Biết rằng, số sản phẩm mà cơ sở sản xuất được trong mỗi ngày là bằng nhau. Hỏi, theo kế hoạch mỗi ngày cơ sở làm được bao nhiêu sản phẩm?

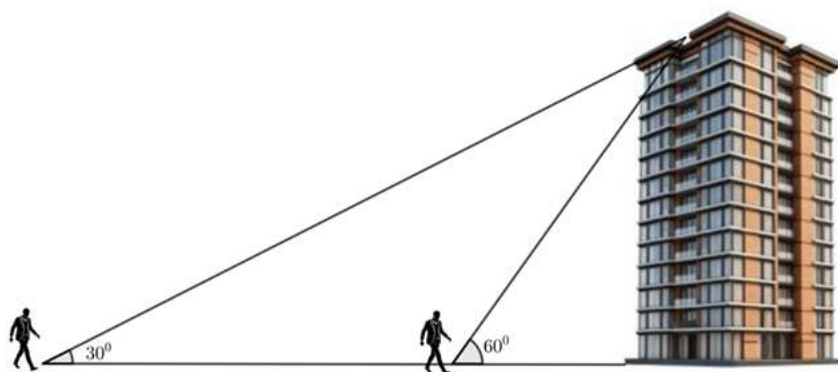
b) Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình $x^2 + 5x + a = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 3x_1 = 14x_2$.

Câu 4 (3,0 điểm).

1. Cho đường tròn tâm O , có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên dây BC lấy điểm E (E khác B và C), trên dây BD lấy điểm F sao cho $\widehat{EAF} = \frac{1}{2}\widehat{CAD}$. Gọi G, H lần lượt là giao điểm của AE, AF với CD .

- a) Chứng minh: $\triangle AHD$ đồng dạng với $\triangle AEB$.
- b) Chứng minh tứ giác $ACEH$ là tứ giác nội tiếp.
- c) Chứng minh tứ giác $GEFH$ và tam giác AGH có diện tích bằng nhau.

2. Bạn Huy đứng trên tầng thượng một toà nhà cao 50m, quan sát một người đi bộ về phía toà nhà với phương nhìn tạo với phương nằm ngang một góc bằng 30° . Sau một phút, bạn Huy vẫn nhìn thấy người đi bộ đó nhưng với phương nhìn tạo với phương ngang một góc bằng 60° (hướng đi của người đi bộ và vị trí bạn Huy như hình vẽ).



Coi vận tốc của người đi bộ trong quá trình bạn Huy quan sát là không đổi. Tính vận tốc (đơn vị: km/h) của người đi bộ trong quá trình đó? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 5 (1,0 điểm).

- a) Tìm các giá trị x, y nguyên dương thỏa mãn $x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x - 2y = 9$.
- b) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b^2 + c^2 + a} + \frac{b}{c^2 + a^2 + b} + \frac{c}{a^2 + b^2 + c}.$$

.....Hết.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

DỰ THẢO CẤU TRÚC, MA TRẬN ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN TOÁN

I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN: 12 câu (3,0 điểm).

STT	Mạch kiến thức/Chủ đề	Nội dung cụ thể
1	Phương trình, hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn (0,5 điểm)	- Nhận biết phương trình bậc nhất hai ẩn; hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. - Nhận biết nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn. - Nhận biết nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.
2	Căn bậc hai, căn bậc ba (0,5 điểm)	- Nhận biết được khái niệm về căn bậc hai của số thực không âm, căn bậc ba của một số thực. - Tính được giá trị căn bậc hai, căn bậc ba của một số hữu tỷ. - Nhận biết căn bậc hai của một biểu thức đại số; điều kiện xác định biểu thức chứa căn bậc hai.
3	Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) (0,5 điểm)	- Nhận biết tính đối xứng trục và trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$). - Nhận biết đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Điểm thuộc đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2$ ($a \neq 0$).
4	Phương trình bậc hai một ẩn. Định lý Viet (0,5 điểm)	- Nhận biết khái niệm phương trình bậc hai một ẩn - Nhận biết hệ thức của định lý Viet.
5	Hệ thức lượng trong tam giác vuông (0,25 điểm)	- Nhận biết các giá trị sin, cosin, tang, cotang của góc nhọn.
6	Đường tròn (0,5 điểm)	- Nhận biết được điểm thuộc hay không thuộc đường tròn. - Nhận biết tâm đối xứng, trục đối xứng của đường tròn. - Nhận biết cung, dây cung, đường kính của đường tròn và quan hệ giữa độ dài dây và đường kính. - Nhận biết góc ở tâm, góc nội tiếp; cung bị chắn. - Nhận biết và xác định số đo của một cung - Nhận biết đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác.

		- Nhận biết tiếp tuyến của đường tròn dựa vào định nghĩa và dấu hiệu nhận biết. - Nhận biết các vị trí tương đối của hai đường tròn. - Nhận biết tứ giác nội tiếp đường tròn.
7	Tần số và tần số tương đối (0,25 điểm)	- Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 9 và trong thực tiễn.

II. TỰ LUẬN: 6 câu (7,0 điểm).

STT	Mạch kiến thức/Chủ đề	Nội dung cụ thể
1	- Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn - Phương trình bậc hai một ẩn. (2,0 điểm)	- Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn - Giải bài toán bằng cách lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn áp dụng thực tiễn. - Giải phương trình bậc hai một ẩn. - Giải bài toán bằng cách lập phương trình.
2	Căn bậc hai, Căn bậc ba (0,5 điểm)	- Rút gọn biểu thức chứa căn.
3	Hình học và đo lường (3,0 điểm)	- Chứng minh các điểm cùng thuộc một đường tròn. - Chứng minh tính chất hình học; tam giác đồng dạng; chứng minh đẳng thức, tiếp tuyến của đường tròn. - Cực trị hình học, chứng minh 3 điểm thẳng hàng, yếu tố cố định...
4	Xác suất (0,5 điểm)	- Tính xác suất của biến cố bằng cách kiểm đếm số trường hợp có thể và số trường hợp thuận lợi trong một số mô hình xác suất đơn giản.
5	Một số hình khối trong thực tiễn (0,5 điểm)	Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính diện tích xung quanh, thể tích của hình trụ, hình nón, hình cầu.
6	Bất đẳng thức, Phương trình, hệ phương trình vô tỉ (0,5 điểm)	- Các bài toán chứng minh bất đẳng thức - Giải phương trình, hệ phương trình vô tỉ.

ĐỀ THAM KHẢO

(Đề thi gồm có 02 trang)

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm).

Thí sinh trả lời câu hỏi từ 1 đến 12, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời A, B, C, D, viết vào tờ giấy thi một phương án đúng mà thí sinh chọn.

Câu 1. Cho phương trình $x - 3y = 4$. Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là nghiệm của phương trình đã cho?

- A. $(x; y) = (1; -1)$. B. $(x; y) = (-1; -1)$. C. $(x; y) = (-1; 1)$. D. $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 2. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ có nghiệm là

- A. $(x; y) = (2; 1)$. B. $(x; y) = (-2; -1)$. C. $(x; y) = \left(-\frac{2}{5}; \frac{13}{5}\right)$. D. $(x; y) = \left(\frac{2}{5}; -\frac{13}{5}\right)$.

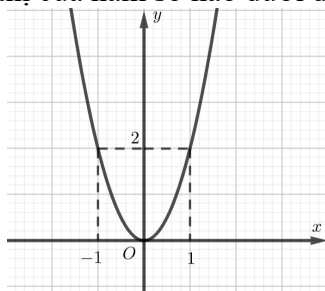
Câu 3. Cho biểu thức $P = \sqrt{25a^2 + a}$ với $a \geq 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $P = -4a$. B. $P = 26a$. C. $P = 6a$. D. $P = -24a$.

Câu 4. Biểu thức $P = \sqrt{3}(\sqrt{27} - \sqrt{12})$ có giá trị bằng

- A. 9. B. 6. C. 45. D. 3.

Câu 5. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = 2x^2$. B. $y = -2x^2$. C. $y = -x^2$. D. $y = x^2$.

Câu 6. Cho điểm M thuộc hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$. Nếu M có hoành độ bằng 4 thì tung độ của M bằng

- A. 32. B. 16. C. 8. D. 4.

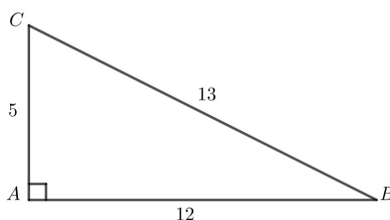
Câu 7. Biết rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) có một nghiệm $x = -1$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $a + b + c = 0$. B. $a - b + c = 0$. C. $-a - b + c = 0$. D. $a - b - c = 0$.

Câu 8. Cho phương trình $3x^2 - 8x + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tổng $x_1 + x_2$ bằng

- A. $-\frac{8}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 12$, $AC = 5$, $BC = 13$ (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào dưới đây đúng?



- A. $\cos \widehat{ABC} = \frac{12}{13}$. B. $\cos \widehat{ABC} = \frac{5}{13}$. C. $\cos \widehat{ABC} = \frac{5}{12}$. D. $\cos \widehat{ABC} = \frac{13}{12}$.

Câu 10. Cho điểm O và đường thẳng d , biết khoảng cách từ O đến d bằng 5. Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn nào dưới đây?

- A. $(O;6)$. B. $(O;4)$. C. $(O;5)$. D. $(O;10)$.

Câu 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm. Đường kính của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ bằng

- A. 5 cm. B. 10 cm. C. 6 cm. D. 8 cm.

Câu 12. Để mua giày thể thao cho các bạn nam trong lớp luyện tập chuẩn bị cho giải bóng đá của trường, bạn lớp trưởng đã thu thập và thống kê cỡ giày của 22 bạn nam, kết quả như sau:

Cỡ giày	36	37	38	39	40
Tần số	2	4	3	5	8

Theo bảng số liệu trên, có bao nhiêu bạn nam có cỡ giày là 39?

- A. 4. B. 3. C. 8. D. 5.

PHẦN II. TỰ LUẬN (7,0 điểm).

Câu 1 (1,5 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 - 10x + 4 = 0$.

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức $P = \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{6}{x-1}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Vĩnh và Hòa cùng vào một hiệu sách để mua bút và mua vở. Vĩnh mua 5 chiếc bút và 6 cuốn vở hết 145 000 đồng, Hòa mua 3 chiếc bút và 8 cuốn vở hết 175 000 đồng. Biết rằng, những chiếc bút và những cuốn vở mà hai bạn đã mua là cùng loại (có giá tiền như nhau). Tính giá tiền một chiếc bút và giá tiền một cuốn vở.

Câu 3 (0,5 điểm). Một hộp có chứa 5 viên bi, trong đó có hai viên bi màu vàng lần lượt ghi các số 1; 2 và ba viên bi màu đỏ lần lượt ghi các số 3; 4; 5. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi từ hộp đó. Tính xác suất của biến cố A : "Hai viên bi được lấy ra khác màu".

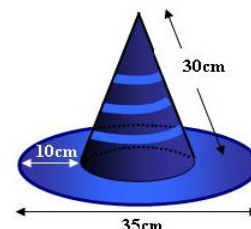
Câu 4 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O, R) có đường kính AB . Kẻ đường kính CD vuông góc với AB . Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC , gọi E là giao điểm của AM và CD . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt đường thẳng BM tại N .

a) Chứng minh bốn điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $EN \parallel CB$.

c) Chứng minh $AM \cdot BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để tam giác BNC có diện tích lớn nhất.

Câu 5 (0,5 điểm). Một cái mũ gồm một hình nón và một hình vành khăn có các kích thước như hình vẽ. Tính diện tích vải cần dùng để tạo ra bề mặt bên ngoài của cái mũ (bỏ qua diện tích vải bị hao hụt khi may mũ, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của centimet vuông).



Câu 6 (0,5 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (c+ab)(b+ac)(a+bc).$$

.....Hết.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 21 tháng 10 năm 2025

THÔNG BÁO

Cấu trúc, yêu cầu đánh giá và bảng năng lực, cấp độ tư duy đề tuyển sinh vào lớp 10 trung học phổ thông

Môn Toán

1. Phạm vi và định hướng đánh giá

1.1. Phạm vi đánh giá

Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 môn Toán cấp Trung học cơ sở. Bao gồm các mạch kiến thức: Hình học và Đo lường; Số và Đại số; Thống kê và Xác suất.

Nội dung kiểm tra nhằm mục đích đánh giá các năng lực toán học:

- Tư duy và lập luận toán học.
- Giải quyết vấn đề toán học.
- Mô hình hoá toán học.

1.2. Định hướng đánh giá

Học sinh biết vận dụng kiến thức đã học giải quyết các vấn đề thực tế. Khuyến khích tăng cường việc tự học, sáng tạo, tránh tình trạng học tủ, học vẹt.

Nội dung kiểm tra đánh giá nhằm giúp học sinh định hướng một số kiến thức, kỹ năng cần thiết khi bước vào cấp Trung học phổ thông.

1.3. Cấu trúc đề thi

Bài 1. (1,5 điểm) Cho hàm số $y = ax^2$

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
- Tìm những điểm thuộc (P) thỏa điều kiện cho trước.

Bài 2. (1 điểm) Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

- Tìm điều kiện có nghiệm của phương trình.
- Vận dụng hệ thức Viète, tính giá trị biểu thức liên quan đến các nghiệm.

Bài 3. (1,5 điểm) Dạng toán thực tế liên quan đến xác suất, thống kê.

Bài 4. (1 điểm)

- Viết biểu thức A biểu diễn theo một đại lượng x nào đó trong bài toán thực tế.
- Tìm giá trị của x để A thỏa điều kiện nào đó.

Bài 5. (1 điểm) Dạng toán thực tế liên quan đến hình học:

Chu vi, diện tích tam giác, tứ giác, độ dài cung tròn, chu vi đường tròn, diện tích hình tròn, hình quạt tròn, hình viên phân, hình vành khăn...

Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích các hình khối trong thực tế...

Bài 6. (1 điểm) Dạng toán thực tế liên quan đến phương trình, bất phương trình, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 7. (3 điểm) Bài toán hình học phẳng gồm 3 câu.

- Chứng minh 4 điểm thuộc đường tròn, các yếu tố song song, vuông góc, bằng nhau...
- Chứng minh hệ thức, các yếu tố bằng nhau, thẳng hàng, đồng quy...
- Tính toán độ dài, chu vi, diện tích, số đo góc...

1.4. Căn cứ đánh giá

Các yêu cầu cần đạt trong Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 - Môn Toán cấp Trung học cơ sở, chủ yếu là lớp 8 và lớp 9.

2. Bảng năng lực và cấp độ tư duy

TT	Kiến thức/ Năng lực	Mạch kiến thức	Số câu	Cấp độ tư duy						Tổng %
				Nhận biết		Thông hiểu		Vận dụng		
				Số câu	Tỉ lệ	Số câu	Tỉ lệ	Số câu	Tỉ lệ	
1	Tư duy và lập luận toán học	Hình học và Đo lường	3	1 (7a)	10%	1 (7b)	10%	1 (7c)	10%	30%
2	Giải quyết vấn đề toán học	Số và Đại số	4	1 (1a)	10%	2 (1b,2a)	10%	1 (2b)	5%	25%
		Thống kê và Xác suất	3	1 (3a)	5%	2 (3b,3c)	10%			15%

TT	Kiến thức/ Năng lực	Mạch kiến thức	Số câu	Cấp độ tư duy						Tổng %
				Nhận biết		Thông hiểu		Vận dụng		
				Số câu	Tỉ lệ	Số câu	Tỉ lệ	Số câu	Tỉ lệ	
3	Mô hình hóa Toán học	Số và Đại số	2			1 (4b)	5%	1 (6)	10%	15%
		Hình học và Đo lường	3	1 (5a)	5%	1 (4a)	5%	1 (5b)	5%	15%
Tỉ lệ %					30%		40%		30%	100%
Tổng			15	4		7		4		

ĐỀ THAM KHẢO – KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
MÔN TOÁN

Thời gian: 120 phút

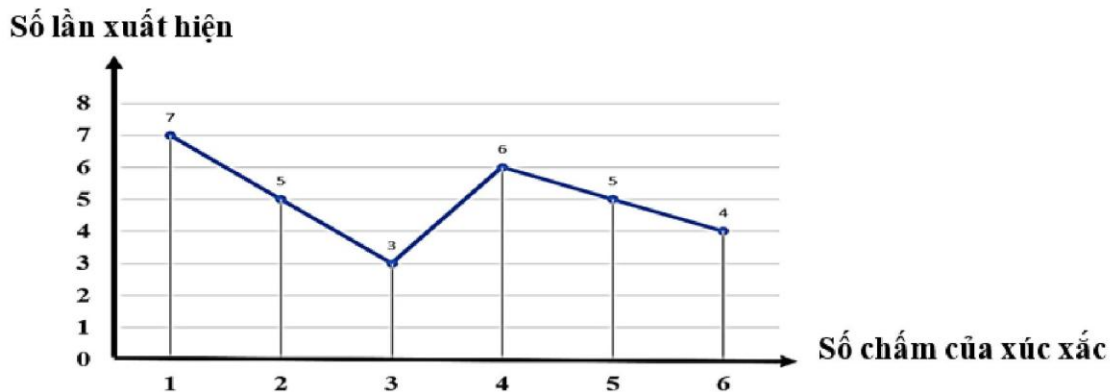
Bài 1. (1,5 điểm) Cho parabol $(P): y = -\frac{1}{2}x^2$

- a) Vẽ đồ thị (P) trên hệ trục tọa độ.
b) Tìm tọa độ các điểm M thuộc (P) (khác gốc tọa độ) có hoành độ bằng tung độ

Bài 2. (1,0 điểm) Cho phương trình $x^2 - 5x + 1 = 0$

- a) Chứng minh phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
b) Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2 - 2x_1 - 2x_2$

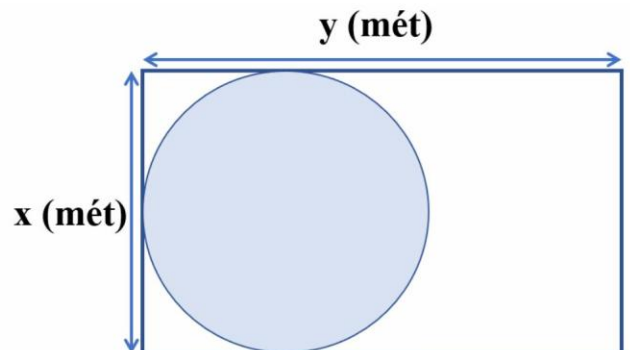
Bài 3. (1,5 điểm) Bạn A gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất nhiều lần. Các kết quả sau khi kết thúc việc gieo con xúc xắc được bạn Bình thể hiện trong biểu đồ đoạn thẳng sau:



- a) Tìm giá trị trung bình cộng về số chấm sau các lần gieo của bạn A.
b) Tính xác suất thực nghiệm của biến cố A: “Số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc là số 2”.
c) Tính xác suất thực nghiệm của biến cố B: “Số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc là một số lớn hơn 3”.

Bài 4. (1,0 điểm) Một khu vườn hình chữ nhật có chiều rộng là x (mét), chiều dài là y (mét).

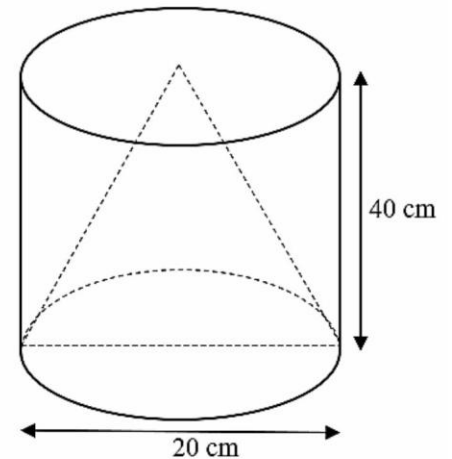
Bác Cường dự định xây một cái hồ hình tròn tiếp xúc với các cạnh của khu vườn như hình vẽ.



- a) Viết biểu thức tính diện tích phần còn lại của khu vườn sau khi xây hồ theo x và y

- b) Biết rằng khu vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và diện tích phần còn lại của khu vườn là $77,76 \text{ m}^2$. Tìm các kích thước ban đầu của khu vườn. (Lấy giá trị $\pi \approx 3,14$)

Bài 5. (1,0 điểm) Bác Nam có một khối gỗ có dạng hình trụ với chiều cao là 40 cm và đường kính đáy là 20 cm . Bác Nam muốn tiện khối gỗ này thành một vật trang trí có dạng hình nón có cùng chiều cao và bán kính đáy với khối gỗ hình trụ ban đầu.



- Tính thể tích phần gỗ bỏ đi khi thực hiện việc tiện khối gỗ hình trụ thành vật trang trí hình nón.
- Sau khi hoàn thành sản phẩm, bác Nam dự tính phun sơn bề mặt bên ngoài của vật trang trí. Tính diện tích cần phải phun sơn (bao gồm cả mặt đáy).

(Các kết quả làm tròn chính xác đến hàng phần trăm của đơn vị)

Biết công thức tính thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h$ (R là bán kính đáy, h là chiều cao); công thức tính thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$; công thức tính diện tích xung quanh hình nón $S = \pi R l$ (l là độ dài đường sinh).

Bài 6. (1,0 điểm)

Hai bạn An và Bình đua với nhau bằng ván trượt. Biết rằng nếu cả hai cùng dùng ván trượt thì tốc độ của An gấp 3 lần của Bình, nhưng tốc độ trượt ván của Bình sẽ gấp 3 lần tốc độ chạy bộ của An. Khi tham gia cuộc đua, hai bạn xuất phát cùng một lúc bằng ván trượt, nhưng sau đó 3 phút, ván trượt của An bị hỏng và bạn ấy phải chạy bộ về đích. Biết rằng cả hai bạn về đích cùng lúc, hỏi cuộc đua đã diễn ra trong bao nhiêu phút? (Giả sử tốc độ trượt ván, tốc độ chạy bộ của An và tốc độ trượt ván của Bình không thay đổi trong suốt cuộc đua).

Bài 7. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Vẽ đường kính AD của đường tròn (O) và đường cao AH của tam giác ABC .

- Chứng minh $\angle ACD = 90^\circ$ và $AB.AC = AH.AD$.
- Vẽ $CF \perp AD$, chứng minh rằng $AC^2 = AF.AD$ và $\angle CHF = \angle DCF$.
- Vẽ $BK \perp AC$, BK cắt AH tại I . Giả sử $\angle BAC = 60^\circ$, $BC = 10\text{ cm}$, tính độ dài AI .

- HẾT -

ĐÁP ÁN ĐỀ THAM KHẢO – KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
MÔN: TOÁN

(Lời giải và $\text{\LaTeX}$ bởi Nguyễn Phương Đại)

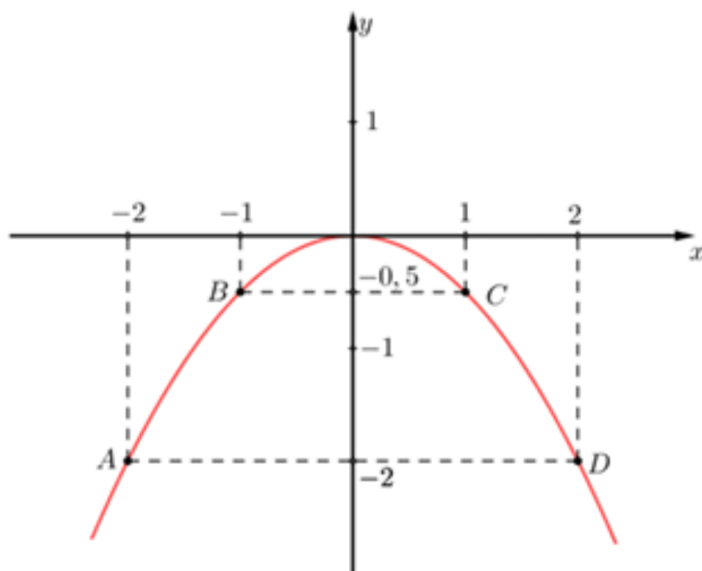
Bài 1. (1,5 điểm)

a) Vẽ đồ thị (P) trên hệ trục tọa độ.

Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	-0,5	0	-0,5	-2

Ta vẽ được đồ thị hàm số $y = -\frac{x^2}{2}$ như sau:



b) Tìm tọa độ các điểm M thuộc (P) (khác gốc tọa độ) có hoành độ bằng tung độ.

Gọi $M(x_M; y_M)$ là một điểm thuộc (P) .

Vì M có hoành độ bằng tung độ nên: $x_M = -\frac{1}{2}x_M^2$ hay $2x_M + x_M^2 = 0$. Giải phương trình ta được hai giá trị thỏa mãn là $x_M = 0$ (loại vì điểm cần tìm khác gốc tọa độ); $x_M = -2$.

Vậy điểm thuộc (P) có hoành độ bằng tung độ có tọa độ là $(-2; -2)$.

Bài 2. (1,0 điểm)

a) Chứng minh phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Phương trình $x^2 - 5x + 1 = 0$ có $a = 1$, $b = -5$, $c = 1$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.1 = 21 > 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2 - 2x_1 - 2x_2$.

Theo định lý Viète, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 5 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (x_1 - x_2)^2 - 2x_1 - 2x_2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) \\ &= 5^2 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = 11. \end{aligned}$$

Bài 3. (1,5 điểm)

a) Tìm giá trị trung bình cộng về số chấm sau các lần gieo của bạn A.

Tổng số lần gieo là: $7 + 5 + 3 + 6 + 5 + 4 = 30$ lần.

Tổng số chấm thu được sau các lần gieo là:

$$7 \times 1 + 5 \times 2 + 3 \times 3 + 6 \times 4 + 5 \times 5 + 4 \times 6 = 99.$$

Giá trị trung bình cộng về số chấm sau các lần gieo: $\frac{99}{30} = 3,3$.

b) Tính xác suất thực nghiệm của biến cố A: "Số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc là số 2".

Số lần số chấm 2 xuất hiện là: 5 lần.

Tổng số lần gieo là: 30 lần.

Xác suất thực nghiệm của biến cố A là $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

c) Tính xác suất thực nghiệm của biến cố B: "Số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc là một số lớn hơn 3".

Biến cố B là "Số chấm xuất hiện là một số lớn hơn 3". Các số chấm lớn hơn 3 là 4, 5, 6.

Số lần xuất hiện của số chấm 4 là: 6 lần.

Số lần xuất hiện của số chấm 5 là: 5 lần.

Số lần xuất hiện của số chấm 6 là: 4 lần.

Tổng số lần biến cố B xảy ra là: $6 + 5 + 4 = 15$ lần.

Tổng số lần gieo là: 30 lần.

Xác suất thực nghiệm của biến cố B là $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

Bài 4. (1,0 điểm)

a) Viết biểu thức tính diện tích phần còn lại của khu vườn sau khi xây hồ theo x và y

Với $x, y > 0$, diện tích khu vườn hình chữ nhật là: xy (m²)

Bán kính hồ hình tròn tiếp xúc với các cạnh của khu vườn là: $\frac{x}{2}$ (m)

Diện tích hồ hình tròn là: $\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}$ (m²)

Vậy biểu thức tính diện tích phần còn lại của khu vườn sau khi xây hồ là: $xy - \frac{\pi x^2}{4}$ (m²).

b) Biết rằng khu vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và diện tích phần còn lại của khu vườn là $77,76 \text{ (m}^2\text{)}$. Tìm các kích thước ban đầu của khu vườn. (Lấy giá trị $\pi \approx 3,14$)

Vì khu vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng nên $y = 2x$

Diện tích phần còn lại của khu vườn là $77,76 \text{ (m}^2\text{)}$ nên ta có:

$$xy - \frac{\pi x^2}{4} = xy - \frac{3,14 \cdot x^2}{4} = xy - 0,785x^2 = 77,76$$

Thay $y = 2x$ vào phương trình trên:

$$2x^2 - 0,785x^2 = 77,76$$

$$x^2 = 64$$

Suy ra $x = -8$ (loại); $x = 8$ (thỏa mãn)

Vậy khu vườn hình chữ nhật có chiều rộng là 8m, chiều dài là 16m.

Bài 5. (1,0 điểm)

a) Tính thể tích phần gỗ bỏ đi khi thực hiện việc tiện khối gỗ hình trụ thành vật trang trí hình nón.

Thể tích khối gỗ dạng hình trụ:

$$V_T = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^2 \cdot 40 = 4000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích khối gỗ dạng hình nón:

$$V_N = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 40 = \frac{4000\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích phần gỗ bỏ đi khi thực hiện việc tiện khối gỗ hình trụ thành vật trang trí hình nón:

$$V = V_T - V_N = 4000\pi - \frac{4000\pi}{3} \approx 8377,58 \text{ (cm}^3\text{)}$$

b) Sau khi hoàn thành sản phẩm, bác Nam dự tính phun sơn bề mặt bên ngoài của vật trang trí. Tính diện tích cần phải phun sơn (bao gồm cả mặt đáy).

Đường sinh của hình nón:

$$l = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{40^2 + 10^2} = \sqrt{1700} \text{ cm}$$

Diện tích xung quanh hình nón:

$$S_{xq} = \pi R l = \pi \cdot 10 \cdot \sqrt{1700} = 100\sqrt{17}\pi \text{ cm}^2$$

Diện tích mặt đáy: $S_d = \pi R^2 = 100\pi \text{ cm}^2$

Diện tích cần phun sơn:

$$S = S_{xq} + S_d = 100\sqrt{17}\pi + 100\pi \approx 1609,47 \text{ cm}^2$$

Vậy diện tích cần phun sơn là $1609,47 \text{ cm}^2$.

Bài 6. (1,0 điểm)

Gọi tốc độ trượt ván của Bình là x ($x > 0$, m/s)

Gọi thời gian cuộc đua đã diễn ra là y ($y > 0$, giây)

Vì tốc độ trượt ván của An gấp 3 lần tốc độ trượt ván của Bình nên tốc độ trượt ván của An là $3x$ (m/s)

Vì tốc độ trượt ván của Bình gấp 3 lần tốc độ chạy bộ của An nên An chạy với tốc $\frac{x}{3}$ (m/s)

Thời gian An chạy bộ là $y - 180$ (giây)

Quãng đường mà An trượt ván và chạy là $3x \cdot 180 + \frac{x}{3} \cdot (y - 180)$ (m)

Quãng đường mà Bình trượt ván là xy (m)

Vì quãng đường của An và Bình đi là như nhau nên ta có phương trình

$$3x \cdot 180 + \frac{x}{3} \cdot (y - 180) = xy$$

$$540x + \frac{xy}{3} - 60x = xy$$

$$480x = \frac{2}{3}xy$$

$$480 = \frac{2}{3}y \quad (\text{do } x \neq 0)$$

$$y = 720 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy thời gian cuộc đua đã diễn ra là $720 \text{ giây} = 12 \text{ phút}$.

Bài 7. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Vẽ đường kính AD của đường tròn (O) và đường cao AH của tam giác ABC .

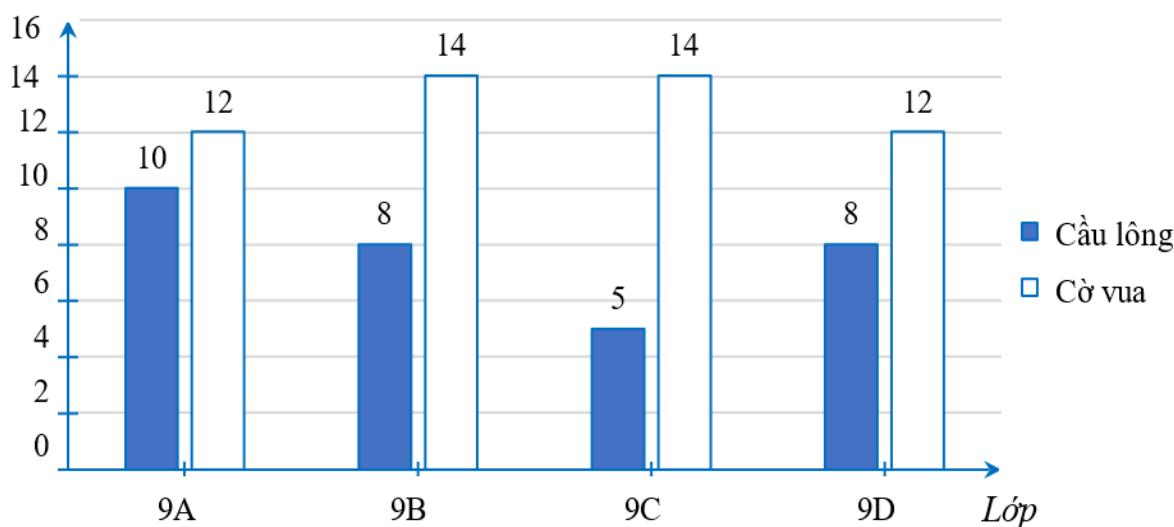
Xem thêm: **ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 MÔN TOÁN**
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-tuyen-sinh-lop-10-mon-toan>

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài I. (1,5 điểm)

1) Cho biểu đồ cột kép (hình bên dưới) thể hiện số lượng học sinh tham gia đăng kí hai câu lạc bộ cầu lông và cờ vua của trường THCS Thọ Lộc:

Số học sinh



- a) Tính tổng số học sinh đăng kí tham gia mỗi câu lạc bộ.
b) Tính tỉ số phần trăm của tổng số học sinh đăng kí tham gia câu lạc bộ cầu lông với tổng số học sinh đăng kí tham gia câu lạc bộ cờ vua. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

2) Trong túi có 20 viên bi có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 12 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh, 3 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong túi. Tính xác suất của biến cố A “lấy được viên bi màu đỏ”.

Bài II. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{2x+5}{x-2}$ và $B = \frac{x-3}{x^2-1} + \frac{x}{x-1} - \frac{5}{x+1}$ với $x \neq 2, x \neq -1; x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 5$.
2) Rút gọn biểu thức B.
3) Tìm tất cả các giá trị không âm của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên

Bài III. (3,0 điểm)

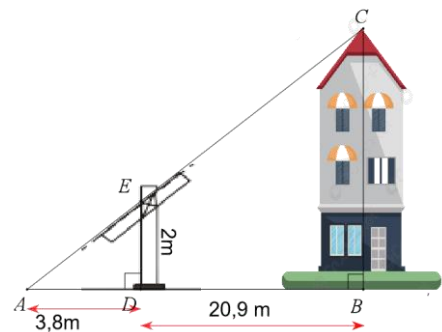
1) Quãng đường AB dài 156 km. Một người đi xe máy từ A, một người đi xe đạp từ B và hai xe xuất phát cùng một lúc thì sau 3 giờ gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng vận tốc của người đi xe máy nhanh hơn vận tốc của người đi xe đạp là 28 km/h.

2) Sau trận bão số 10 và 11 vừa qua, trường THCS Thọ Lộc phát động ủng hộ cho đồng bào bị ảnh hưởng do bão. Bên cạnh việc ủng hộ bằng tài chính, khối 8 và khối 9 có phát động học sinh ủng hộ sách cho các bạn vùng bị ảnh hưởng bởi bão. Hai khối theo kế hoạch ủng hộ tổng cộng 360 quyển. Trên thực tế, khối 8 ủng hộ vượt mức 12%, khối 9 ủng hộ vượt mức 10% do đó cả hai khối ủng hộ được 400 quyển. Hỏi theo kế hoạch, mỗi khối đã ủng hộ được bao nhiêu cuốn sách.

3) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} (x+20)(y-1) = xy \\ (x-10)(y+1) = xy \end{cases}$$

Bài IV. (3,5 điểm)

1) Để đo chiều cao của tòa nhà, người ta sử dụng cọc thẳng DE có gắn thước ngắm quay được quanh chốt của cọc. Điều khiển thước ngắm sao cho hướng thước đi qua đỉnh C của tòa nhà. Biết $DE = 2\text{m}$, $AD = 3,8\text{m}$, $DB = 20,9\text{m}$ (hình vẽ minh họa). Tính chiều cao của tòa nhà.



2) Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$).

a) Tính độ dài cạnh BC và số đo góc B của tam giác ABC (kết quả số đo góc làm tròn đến độ), biết $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$.

b) Gọi M là trung điểm của AC, qua A kẻ AI vuông góc với BM ($I \in BM$).

Chứng minh $\Delta AMB \sim \Delta IMA$ và $\sin^2 \angle ABM = \frac{IM}{BM}$.

c) Gọi K là hình chiếu của M trên BC. Tia AI cắt đường thẳng qua C và vuông góc với AC tại N. Chứng minh ba điểm M, K, N thẳng hàng.

Bài V. (0,5 điểm)

Bác An có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng/tháng thì 50 căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 50000 đồng/tháng thì sẽ có 1 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi hàng tháng bác An muốn thu được số tiền cho thuê nhà nhiều nhất thì bác An phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu tiền.

-----**Hết**-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1:

Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:.....

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2 điểm)

1) Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}+3} + \frac{6}{4x-9} \right) : \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right)$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{9}{4}$.

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

2) Cho đa thức $P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 + ax^2 + 3x - 3$, trong đó a là số thực. Tính $P(1)$ biết $P(1 + \sqrt[3]{2}) = 0$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2 - 5x + 4\sqrt{3x+1} - 4 = 0$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2 = 4y \\ y(x-y)^2 + 3x^2 - 7y = -6 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 22x + 2y + 8 = 0.$$

2) Cho 3 số tự nhiên, biết tổng của hai số bất kỳ trong 3 số đó là một số chính phương. Chứng minh rằng trong 3 số đã cho có không quá một số lẻ.

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi I là giao điểm của EF và AH . Kẻ IJ song song với BC (J thuộc HE). Đường thẳng AJ cắt BC tại M .

a) Chứng minh $\angle AEF = \angle AMB$.

b) Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC . Chứng minh $AC.LE = AB.LC$.

2) Cho đường tròn $(O;R)$ cố định. Tam giác ABC thay đổi ngoại tiếp đường tròn $(O;R)$, có $\angle BAC = 60^\circ$. Đường thẳng (d) thay đổi và luôn đi qua tâm O , (d) cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN theo R .

Câu 5. (1,0 điểm)

1) Trên mặt phẳng cho 2 x 2026 điểm phân biệt, trong đó không có bất kỳ ba điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2026 điểm trong các điểm đã cho bằng màu đỏ và tô 2026 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại 2026 đoạn thẳng mà mỗi đoạn thẳng có 2 điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ - xanh và 2 đoạn thẳng bất kỳ trong số các đoạn thẳng đó không có điểm chung.

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = ab + bc + ca$. Chứng minh

$$\frac{3}{1+a} + \frac{3}{1+b} + \frac{3}{1+c} - \frac{4}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 4.$$

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN
TỈNH HẢI DƯƠNG NĂM HỌC 2025 - 2026

Câu 1.

1) Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{9}{4}$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}+3} + \frac{6}{4x-9} \right) : \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \left(\frac{2\sqrt{x}-3}{(2\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}+3)} + \frac{6}{(2\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}+3)} \right) : \left(\frac{2+\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(2\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}+3)} : \left(\frac{-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}-3} \cdot (1-\sqrt{x}) = \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

Giả sử tồn tại x nguyên sao cho P nhận giá trị nguyên. Ta có:

$$2P = \frac{2-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3} = -\frac{1}{2\sqrt{x}-3} - 1.$$

Vì $2P+1$ nguyên nên $\frac{1}{2\sqrt{x}-3}$ nguyên hay $2\sqrt{x}-3 \in \{1; -1\}$. Hay $\sqrt{x} \in \{2; 1\} \Leftrightarrow x \in \{4; 1\}$.

Thử lại và kết hợp với điều kiện xác định thì $x = 4$ thỏa mãn.

Vậy $x = 4$ thì biểu thức P nhận giá trị nguyên.

2) Đặt $t = 1 + \sqrt[3]{2}$. Khi đó $2 = (t-1)^3$ hay $t^3 - 3t^2 + 3t - 3 = 0$.

Như vậy t là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$. (1)

Ta có: $P(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + (a+6)x^2$. (2)

Thay $x = t$ vào (2) và kết hợp với (1) thì $0 = P(t) = (a+6)t^2$.

Suy ra $a+6 = 0 \Leftrightarrow a = -6$. Do đó $P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 3x - 3$ thì $P(1) = -4$.

Vậy $P(1) = -4$.

Câu 2.

1) Điều kiện xác định: $x \geq -\frac{1}{3}$. Ta có:

$$x^2 - 5x + 4\sqrt{3x+1} - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 4(x+1 - \sqrt{3x+1})$$

Khi đó ta liên hợp vế phải thì $x^2 - x = 4 \cdot \frac{x^2 - x}{x+1 + \sqrt{3x+1}}$ (chú ý $x+1 + \sqrt{3x+1} > 0$).

Trường hợp 1. $x^2 - x = 0$ thì $x = 0$ hoặc $x = 1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. $x+1 + \sqrt{3x+1} = 4$ thì $3-x = \sqrt{3x+1}$ (1)

Với $3 \geq x \geq -\frac{1}{3}$, ta bình phương hai vế của (1) thì có:

$$x^2 - 6x + 9 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0.$$

Suy ra $x = 8$ (loại) hoặc $x = 1$.

Như vậy phương trình ban đầu có tập nghiệm là: $\{0; 1\}$.

$$2) \text{ Ta có: } \begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2 = 4y \\ y(x-y)^2 + 3x^2 - 7y = -6 \end{cases} \quad (*)$$

- Nếu $y = 0$ thì từ (1) ta có: $x^2 + 2 = 0$, vô nghiệm.

- Nếu $y \neq 0$, khi đó $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2 = 4y \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{y} - 2(x-y) = 4$

$$\text{Và } y(x-y)^2 + 3x^2 - 7y = -6 \Leftrightarrow (x-y)^2 + 3\frac{x^2 + 2}{y} = 7.$$

$$\text{Đặt } a = x-y, b = \frac{x^2 + 2}{y}. \text{ Khi đó hệ phương trình trở thành } \begin{cases} -2a + b = 4 \\ a^2 + 3b = 7 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 7 = a^2 + 3b = a^2 + 3(4+2a) = a^2 + 6a + 12 \text{ hay } (a+1)(a+5) = 0.$$

Trường hợp 1: $a = -1 \Rightarrow b = 2$, tức là

$$\begin{cases} x-y = -1 \\ \frac{x^2 + 2}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = x \\ x^2 = 2y-2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, y=1 \\ x=2, y=3 \end{cases}$$

Trường hợp 2: $a = -5 \Rightarrow b = -6$, tức là

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ \frac{x^2 + 2}{y} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ x^2 = -6y - 2 = -6x - 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ x^2 + 6x + 32 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Như vậy nghiệm (x, y) của hệ phương trình đã cho là $(0, 1), (2, 3)$.

Câu 3.

1) Giả sử tồn tại cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 22x + 2y + 8 = 0.$$

Khi đó $y^2 - 2y + 1 = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 22x + 9 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x + 9)$

Hay $(y - 1)^2 = (x - 1)^2(x^2 - 4x + 9)$. (*)

Nếu $y = 1$ từ (*) kéo theo $x = 1$.

Nếu y khác 1, do $(y - 1)^2, (x - 1)^2$ đều là số chính phương, dẫn tới $x^2 - 4x + 9$ là số chính phương.

Đặt $x^2 - 4x + 9 = a^2$, với a là số nguyên dương. Khi đó: $5 = a^2 - (x - 2)^2 = (a - x + 2)(a + x - 2)$.

Chú ý $(a - x + 2) + (a + x - 2) = 2a > 0$ nên ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} a - x + 2 = 1 \\ a + x - 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ x = 4 \end{cases}$

Khi $x = 4$ thì từ (*) ta có: $(y - 1)^2 = 81$ hay $y = 10 \vee y = -8$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} a - x + 2 = 5 \\ a + x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ x = 0 \end{cases}$

Khi $x = 0$ thì từ (*) ta có: $(y - 1)^2 = 9$ hay $y = 4 \vee y = -2$.

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(1, 1), (4, 10), (4, -8), (0, 4), (0, -2)$.

2) Giả sử có ít nhất hai số lẻ trong ba số tự nhiên đã cho.

Trường hợp 1: Nếu cả ba số đó đều lẻ có dạng $2x + 1, 2y + 1, 2z + 1$, trong đó x, y, z là số tự nhiên.

Từ giả thiết đề bài thì $a^2 = 2x + 1 + 2y + 1, b^2 = 2y + 1 + 2z + 1, c^2 = 2z + 1 + 2x + 1$.

Suy ra a, b, c chẵn suy ra $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 4. (1)

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 = 4x + 4y + 4z + 6$ chia cho 4 dư 2. (2)

Từ (1) và (2), ta dẫn đến điều mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Nếu có hai số lẻ dạng $2x + 1, 2y + 1$ và một số chẵn dạng $2z$, trong đó x, y, z là số tự nhiên. Từ giả thiết đề bài thì $a^2 = 2x + 1 + 2y + 1, b^2 = 2y + 1 + 2z, c^2 = 2z + 2x + 1$.

Suy ra a chẵn và b, c lẻ suy ra $a^2 + b^2 + c^2$ chia cho 4 dư 2. (3)

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 = 4(x + y + z + 1)$ chia hết cho 4. (4)

Từ (3) và (4), ta dẫn đến điều mâu thuẫn.

Câu 4.

1)

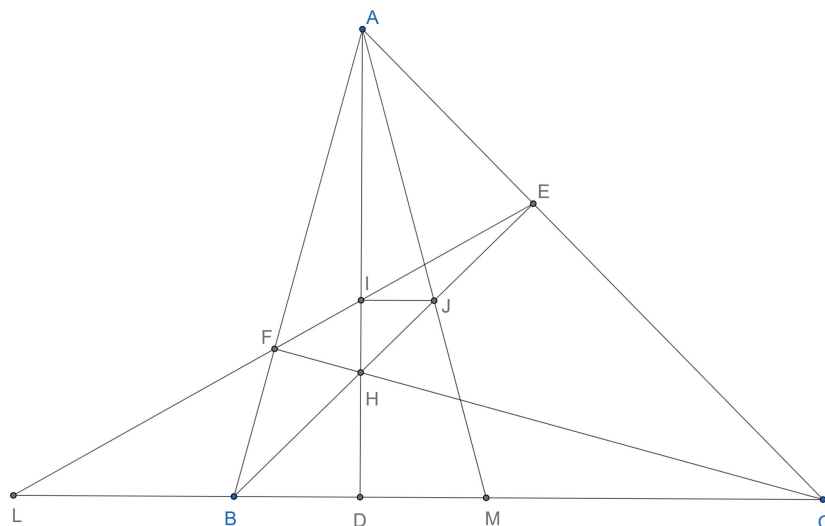
a) Ta chú ý $\angle AIJ = \angle AEJ = 90^\circ$. Suy ra I, E thuộc đường tròn đường kính AJ .

Như vậy tứ giác $AEJI$ nội tiếp nên $\angle AJI = \angle AEF$ (1).

Mặt khác $\angle AJI = \angle AMB$ (do IJ song song với BC) (2).

Từ (1) (2) suy ra $\angle AMB = \angle AEF$.

b) Ta có biến đổi góc sau: $\angle AMC = 180^\circ - \angle AML = 180^\circ - \angle AEF = \angle CEL$.



Khi đó ta có: $\triangle ACM \sim \triangle LCE(g.g)$ suy ra $\frac{CA}{AM} = \frac{LC}{LE} \cdot (3)$

Ta chú ý $\angle AFH = \angle AEH = 90^\circ$. Suy ra E, F thuộc đường tròn đường kính AH .

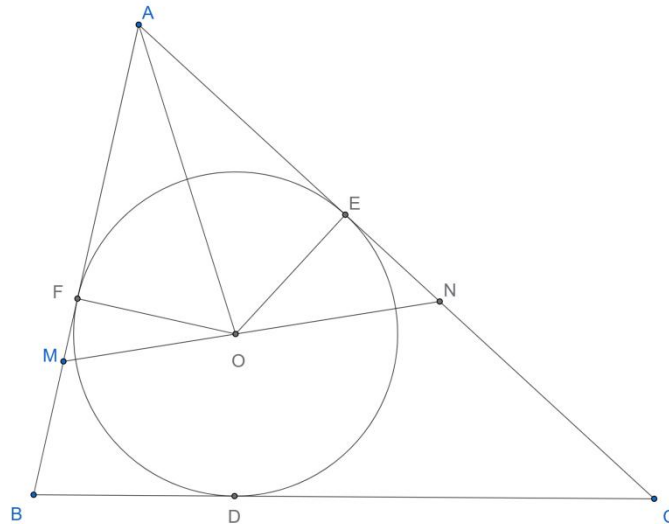
Như vậy tứ giác $AEHF$ nội tiếp thì có $\angle FAH = \angle FEH = \angle IAJ$.

Do đó AD là phân giác của góc BAM .

Mặt khác AD vuông góc BM nên tam giác BAM cân tại A hay $AB = AM$.

Từ (3) thì $\frac{CA}{AB} = \frac{LC}{LE}$ hay $CA \cdot LE = LC \cdot AB$.

2) Ta kí hiệu S_{ABC} là diện tích của tam giác ABC .



Ta gọi giao điểm (O, R) với BC, AC, AB lần lượt là D, E, F .

Khi đó OE vuông góc AC và OF vuông góc AM .

Ta có: $S_{AMN} = S_{AON} + S_{AMO} = \frac{1}{2}OE \cdot AN + \frac{1}{2}OF \cdot AM = \frac{1}{2}R(AN + AM) \cdot (*)$

Mặt khác: $S_{AMN} = \frac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}AM \cdot AN$ suy ra $AM \cdot AN = \frac{4\sqrt{3}}{3}S_{AMN}$.

Từ (*) thì $(S_{AMN})^2 = \frac{R^2}{4}(AM + AN)^2 \geq R^2 \cdot AM \cdot AN = \frac{4\sqrt{3}}{3}R^2 \cdot S_{AMN}$.

Do đó $S_{AMN} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}R^2$.

Vậy $\min S_{AMN} = \frac{4\sqrt{3}}{3} R^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} AM = AN \\ \angle MAN = 60^\circ \end{cases}$ hay tam giác AMN đều.

Câu 5.

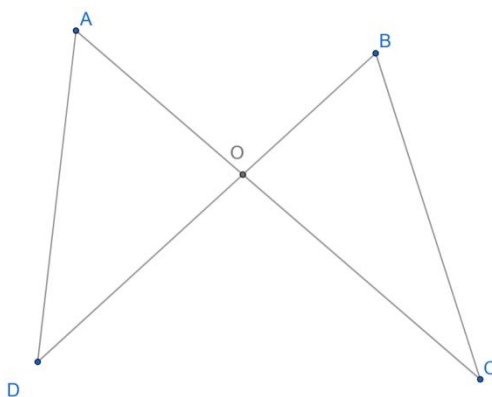
Ta thấy luôn tồn tại cách nối 2026 cặp điểm đỏ - xanh bằng 2026 đoạn thẳng.

Mặt khác do chỉ có 2×2026 điểm nên số cách nối như vậy là hữu hạn.

Khi đó tồn tại cách nối “tốt” mà tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ nhất.

Ta chứng minh cách nối “tốt” này thì với hai đoạn thẳng bất kỳ trong số các đoạn thẳng đó không có điểm chung.

Thật vậy, giả sử tồn tại hai đoạn thẳng AC, BD cắt nhau tại O , trong đó A, B được tô đỏ và C, D được tô xanh. Ta thấy $AD + BC < AO + OD + BO + OC = AC + BD$.



Khi đó ta chỉ đổi cách nối từ (AC, BD) thành (AD, BC) thì có cách nối mới mà tổng các đoạn thẳng là nhỏ nhất.

Như vậy cách nối mà tổng độ dài các đoạn thẳng nhỏ nhất là cách nối mà không có 2 đoạn thẳng nào có điểm chung.

Câu 6.

Ta thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & 3(a+1)(b+1) + 3(b+1)(c+1) + 3(c+1)(a+1) - 4 \geq 4(a+1)(b+1)(c+1) \\ \Leftrightarrow & 3(ab + bc + ca) + 6(a + b + c) + 5 \geq 4abc + 4(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) + 4 \\ \Leftrightarrow & 2(a + b + c) + 1 \geq 4abc + ab + bc + ca \\ \Leftrightarrow & a + b + c + 1 \geq 4abc. (*) \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

- Nếu $a \geq b \geq c > 1$ thì $ab + bc + ca > a + b + c$ (vô lý), suy ra $1 \geq c$.

- Nếu $1 > a \geq b \geq c$ thì $ab + bc + ca < a + b + c$ (vô lý), suy ra $a \geq 1$.

Khi đó $a \geq 1 \geq c \Rightarrow a + c - 1 > 0$. Theo giả thiết thì

$$b(a + c - 1) = a + c - ac \Rightarrow b = \frac{a + c - ac}{a + c - 1}.$$

Thay vào (*) thì $a + c + 1 + \frac{a + c - ac}{a + c - 1} \geq 4ac \cdot \frac{a + c - ac}{a + c - 1}$ hay

$$\begin{aligned}(a + c)^2 - 1 + a + c - ac &\geq 4ac(a + c - ac) \\ \Leftrightarrow [(a + c)^2 - 4ac(a + c) + 4a^2c^2] + (a - 1)(1 - c) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a + c - 2ac)^2 + (a - 1)(1 - c) &\geq 0. (**)\end{aligned}$$

Ta thấy (**) đúng, như vậy bất đẳng thức (*) đúng.

Vậy Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút.

(Đề thi gồm 01 trang, 05 câu)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Gọi S là tập hợp gồm các số tự nhiên có hai chữ số khác nhau, tạo thành từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ và 6 . Mỗi bạn An và Bình viết ngẫu nhiên một số thuộc tập S lên bảng. Tính xác suất để tổng của hai số được viết lên bảng là số chẵn.

b) Lúc 6 giờ sáng, bạn Hải đi xe đạp từ vị trí A đến vị trí B, quãng đường AB dài 25 km. Khi đi được $\frac{2}{5}$ quãng đường AB, Hải dừng lại tại vị trí C để ăn sáng 35 phút. Sau đó, Hải tiếp tục đi từ C đến B với tốc độ chậm hơn 2 km/giờ so với tốc độ đi trên đoạn đường AC. Khi đến B, Hải nghỉ lại 45 phút và quay ngược trở lại A (theo tuyến đường ban đầu) với tốc độ bằng $\frac{3}{4}$ tốc độ đi đoạn đường từ A đến C. Hải về đến A lúc 10 giờ 20 phút sáng cùng ngày. Hỏi bạn Hải đến B lúc mấy giờ (giả sử tốc độ trên từng đoạn đường là không đổi)?

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+1} = 5 - \sqrt{x+1}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x+1) = (y-1)(y-2) \\ 4x^2 - 3y + 6 = 4x\sqrt{4-y} + 2\sqrt{x-y} \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF , tia DM cắt đường tròn (I) tại điểm H (H khác D).

a) Chứng minh $MA \cdot MI = MH \cdot MD$.

b) Tia AH cắt đường tròn (I) tại điểm P (P khác H). Chứng minh hai đường thẳng DP và EF song song.

c) Gọi X là trung điểm của đoạn thẳng BC , đoạn thẳng AX cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm N (N khác A), tia DI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm G (G khác I). Chứng minh tiếp tuyến tại G , tiếp tuyến tại N của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường thẳng EF đồng quy.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \geq 1.$$

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên dương a, b sao cho các số $8a^3 + 18ab + 1$ và $8b^3 + 18ab + 1$ đều là lập phương của số nguyên.

b) Cho tập hợp $S = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 15\}$. Xét T là một tập con của S và có tính chất: với a, b, c bất kì thuộc T (a, b, c đôi một khác nhau) thì tích abc không là số chính phương. Hỏi T có nhiều nhất bao nhiêu phần tử? (Tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B).

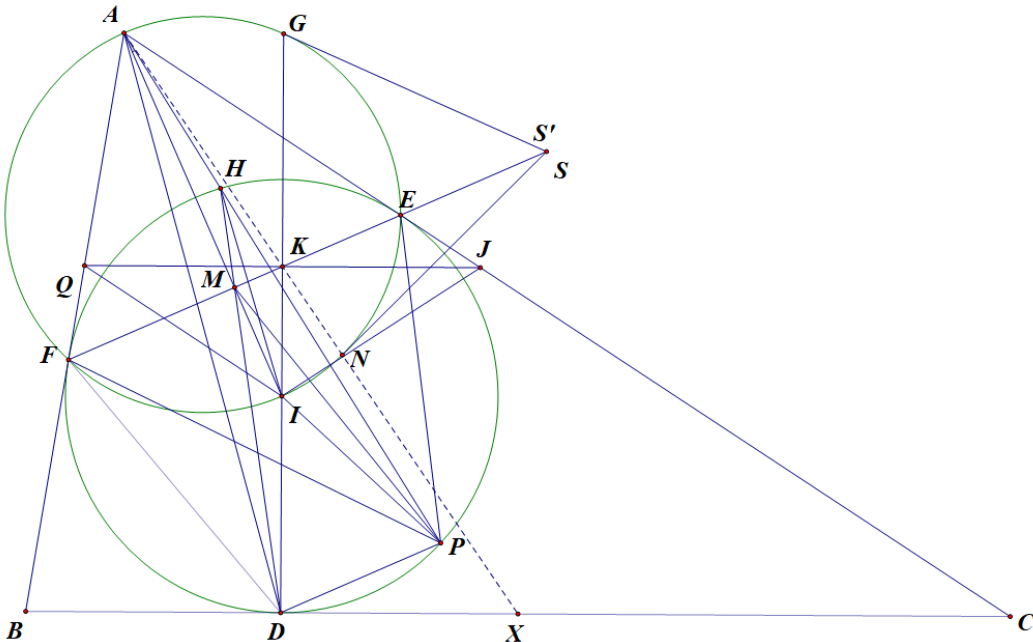
----- HẾT -----

Thí sinh làm bài trên giấy thi, không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi số 1: Cán bộ coi thi số 2:

Câu	Đáp án	Điểm
1 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
	Trong tập S có: Số số có hai chữ số khác nhau là: $6.6 = 36$ Số số lẻ có hai chữ số khác nhau là: $3.5 = 15$ Số số chẵn có hai chữ số khác nhau là: $36 - 15 = 21$	0,25
	$n(\Omega) = 36^2$	0,25
	Biến cố A: “Tổng hai số là số chẵn” $\Rightarrow n(A) = 15^2 + 21^2$	0,25
	Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{15^2 + 21^2}{36^2} = \frac{37}{72}$.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Gọi x (km/giờ) là tốc độ của Hải khi đi quãng đường AC, $x > 2$. Khi đó: tốc độ đi quãng đường theo hướng từ C đến B là: $x - 2$ (km/giờ). Tốc độ khi đi quãng đường từ B về A là: $\frac{3x}{4}$ (km/giờ).	0,25
	Thời gian đi quãng đường AC là: $\frac{10}{x}$ (giờ). Thời gian đi quãng đường CB là: $\frac{15}{x-2}$ (giờ). Thời gian đi quãng đường từ B đến A là: $\frac{25}{\frac{3x}{4}} = \frac{100}{3x}$ (giờ).	0,25
	Theo đề ra ta có phương trình: $\frac{10}{x} + \frac{7}{10} + \frac{15}{x-2} + \frac{3}{4} + \frac{100}{3x} = \frac{13}{3} \Rightarrow \frac{10}{x} + \frac{15}{x-2} + \frac{100}{3x} = 3 \Rightarrow 9x^2 - 193x + 260 = 0$. Suy ra $x_1 = 20$ (chọn); $x_2 = \frac{13}{9}$ (loại). Vậy tốc độ của người đó đi trên đoạn đường AC là 20 (km/giờ).	0,25
	Thời gian từ lúc xuất phát đến khi đến B bằng: $\frac{10}{20} + \frac{7}{10} + \frac{15}{20-2} = \frac{23}{12}$ (giờ). Vậy người đó đến B lúc 7 giờ 55 phút.	0,25
2 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
	ĐKXĐ: $x \geq -1$ $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+1} = 5 - \sqrt{x+1}$ $\Leftrightarrow (x + \sqrt{x+1})^2 + (x + \sqrt{x+1}) - 6 = 0$ $\Leftrightarrow (x + \sqrt{x+1} - 2)(x + \sqrt{x+1} + 3) = 0$	0,5
	Suy ra $x + \sqrt{x+1} - 2 = 0$ vì $x + \sqrt{x+1} + 3 > 0$ với mọi $x \geq -1$.	0,25
	Từ đó ta có: $\sqrt{x+1} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x+1 = 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$.	0,25

3 (3,0 điểm)	b) (1,0 điểm)	
	$\begin{cases} x(x+1) = (y-1)(y-2) & (1) \\ 4x^2 - 3y + 6 = 4x\sqrt{4-y} + 2\sqrt{x-y} & (2) \end{cases}$	0,25
	Điều kiện xác định: $\begin{cases} y \leq 4 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$ $(1) \Leftrightarrow x(x+1) = (y-1)(y-2) \Leftrightarrow (x-y+2)(x+y-1) = 0$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -2 < 0 \text{ (KTM)} \\ y = 1 - x \end{cases}$	0,25
	Thay vào (2): $4x^2 - 3(1-x) + 6 = 4x\sqrt{4-1+x} + 2\sqrt{x-1+x}$ $\Leftrightarrow 4x^2 + 3x + 3 - 4x\sqrt{x+3} - 2\sqrt{2x-1} = 0$ $\Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + (x+3) + (2x-1) - 2\sqrt{2x-1} + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{2x-1} - 1)^2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{x+3} \\ \sqrt{2x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Với } x = 1 \Rightarrow y = 0. \text{ Vậy hệ có nghiệm } (x; y) = (1; 0).$	0,25
	a) (1,0 điểm)	
		0,5
	Ta có A, M, I thẳng hàng và $EF \perp AI$. Tam giác vuông AEI có $MA.MI = ME^2$.	
	Ta có: $HEDF$ nội tiếp suy ra $MH.MD = MF.ME = ME^2$. Từ đó $MA.MI = MH.MD$.	0,5
	b) (1,0 điểm)	
	Theo a) suy ra tứ giác $AHID$ nội tiếp nên $\widehat{ADI} = \widehat{IHP}$.	0,25
	Mặt khác $\triangle IHP$ cân tại I nên $\widehat{IPH} = \widehat{IHP}$. Do đó $\widehat{ADI} = \widehat{IPH}$	0,25
	Lại có $\triangle IDP$ cân tại I nên $\widehat{IDP} = \widehat{IPD}$ Do đó $\widehat{ADP} = \widehat{ADI} + \widehat{IDP} = \widehat{IPH} + \widehat{IPD} = \widehat{APD}$ suy ra $\triangle ADP$ cân tại A	0,25
	Do đó $AD = AP$. Mà $ID = IP$ nên AI là trung trực DP . Vì vậy $EF \parallel DP$ (do cùng vuông góc AI)	0,25

4 (1,0 điểm)	c) (1,0 điểm)	
	Ta thấy ngay A, E, I, F, G, N cùng thuộc đường tròn đường kính AI. Gọi giao điểm DI và EF là K. Qua K kẻ đường vuông góc với KD cắt AB, AC tại Q, J. Ta có: $\widehat{IKQ} = \widehat{IFQ} = 90^\circ$ và $\widehat{IKJ} = \widehat{IEJ} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $QKIF$ và $KEJI$ nội tiếp.	0,25
	Suy ra $\widehat{IQK} = \widehat{IFK} = \widehat{IFE} = \widehat{IEF} = \widehat{IEK} = \widehat{IJK}$. Vì vậy ΔIQJ cân tại I nên K là trung điểm QJ. Xét ΔABC có $QJ \parallel BC$ và K, X lần lượt là trung điểm QJ, BC. Suy ra A, K, X thẳng hàng (theo bổ đề hình thang).	0,25
	Ta có: $AENF$ nội tiếp suy ra $\widehat{ANE} = \widehat{AFE} = \widehat{AEF} = \widehat{ANF}$. Xét ΔNEF có NK là phân giác suy ra $\frac{NE}{NF} = \frac{KE}{KF}$ (1) Ta có $\widehat{FGI} = \widehat{FAI} = \widehat{EAI} = \widehat{EGI}$ nên GK là phân giác ΔGFE suy ra $\frac{GE}{GF} = \frac{KE}{KF}$ (2) Từ (1), (2) suy ra $\frac{NE}{NF} = \frac{GE}{GF}$ (3)	0,25
	Gọi giao điểm tiếp tuyến tại N, tiếp tuyến tại G của đường tròn đường kính AI và đường thẳng FE lần lượt là S, S'. Khi đó $\widehat{SNE} = \widehat{SFN}$ (góc tiếp tuyến) nên $\Delta SNE \sim \Delta SFN$ (g.g) Suy ra $\frac{SN}{SF} = \frac{SE}{SN} = \frac{NE}{FN}$ nên $\frac{SE}{SF} = \frac{SE}{SN} \cdot \frac{SN}{SF} = \left(\frac{NE}{NF}\right)^2$ (4) Tương tự $\Delta S'GE \sim \Delta S'FG$ (g.g). Suy ra $\frac{S'G}{S'F} = \frac{S'E}{S'G} = \frac{GE}{FG}$ nên $\frac{S'E}{S'F} = \frac{S'E}{S'G} \cdot \frac{S'G}{S'F} = \left(\frac{GE}{GF}\right)^2$ (5) Từ (3), (4), (5) suy ra $\frac{SE}{SF} = \frac{S'E}{S'F}$ Vì vậy S trùng S' và tiếp tuyến tại G, N và đường thẳng EF đồng quy.	0,25
	(1,0 điểm)	
	Theo bất đẳng thức AM-GM cho hai số thực dương ta có: $\sqrt{x^3 + 8} = \sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \leq \frac{(x+2) + (x^2 - 2x + 4)}{2} = \frac{x^2 - x + 6}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} \geq \frac{2x^2}{x^2 - x + 6}$	0,25
	Tương tự $\frac{y^2}{\sqrt{y^3 + 8}} \geq \frac{2y^2}{y^2 - y + 6}$; $\frac{z^2}{\sqrt{z^3 + 8}} \geq \frac{2z^2}{z^2 - z + 6}$. Từ đó suy ra: $\frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3 + 8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3 + 8}} \geq \frac{2x^2}{x^2 - x + 6} + \frac{2y^2}{y^2 - y + 6} + \frac{2z^2}{z^2 - z + 6}$.	0,25
	Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz : $\frac{2x^2}{x^2 - x + 6} + \frac{2y^2}{y^2 - y + 6} + \frac{2z^2}{z^2 - z + 6} \geq \frac{2(x+y+z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 - (x+y+z) + 18}$	0,25
	Ta chứng minh: $\frac{2(x+y+z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 - (x+y+z) + 18} \geq 1$ (1) Ta có: (1) tương đương với $2(x+y+z)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 - (x+y+z) + 18$ $\Leftrightarrow (x+y+z)^2 + 2(xy + yz + zx) + (x+y+z) \geq 18$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ và $xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx} = 3$. Khi đó (1) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.	0,25

5 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
	Do a, b vai trò như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b$. Khi đó $(2a)^3 < 8a^3 + 18ab + 1 < 8a^3 + 24a^2 + 24a + 8 = (2a + 2)^3$. (vì $18ab + 1 \leq 18a^2 + 1 < 24a^2$)	0,25
	Do đó $8a^3 + 18ab + 1 = (2a + 1)^3 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$. Từ đó suy ra $3b = 2a + 1$ hay $2a = 3b - 1$.	0,25
	Do đó $8b^3 + 18ab + 1 = 8b^3 + 27b^2 - 9b + 1$ là lập phương của số nguyên. Ta có: $8b^3 < 8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 < 8b^3 + 36b^2 + 54b + 27$. Do đó $(2b)^3 < 8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 < (2b + 3)^3$. Vì vậy $8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 \in \{(2b + 1)^3; (2b + 2)^3\}$.	0,25
	Mà $8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 = 8b^3 + 18ab + 1$ là số lẻ nên $8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 = (2b + 1)^3$ Suy ra $15b^2 - 15b = 0$. Mà $b > 0$ nên $b = 1$. Suy ra $a = \frac{3b - 1}{2} = 1$. Vậy $a = b = 1$.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Ký hiệu $ T $ là số phần tử của tập hợp T . Xét 4 tập hợp $A = \{1; 4; 9\}$, $B = \{2; 6; 12\}$, $C = \{3; 5; 15\}$, $D = \{7; 8; 14\}$ đều có tích 3 phần tử là số chính phương. Nếu $ T \geq 12$ thì tồn tại 1 tập trong 4 tập A, B, C, D là tập con của T Khi đó T tồn tại 3 phần tử có tích là số chính phương.	0,25
	Nếu $ T = 11$. Khi đó $T = S \setminus \{a; b; c; d\}$ mà $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$ (nếu không thì cũng tồn tại 1 tập trong A, B, C, D là tập con của T). Do đó $10 \in T$.	0,25
	Xét 4 tập hợp $A = \{1; 4; 9\}$; $D = \{7; 8; 14\}$; $E = \{2; 5; 10\}$ và $F = \{6; 10; 15\}$ đều có tích ba phần tử là số chính phương. Khi đó $T = S \setminus \{a; d; e; f\}$ với $a \in A, d \in D, e \in \{2; 5\}, f \in \{6; 15\}$. Do đó $3, 12 \in T$ suy ra $1, 4, 9 \notin T$ (vì $1.3.12 = 6^2, 4.3.12 = 12^2, 9.3.12 = 18^2$) Khi đó $\{2; 6; 12\}$ hoặc $\{3; 5; 15\}$ là tập con của T . Suy ra T tồn tại 3 phần tử có tích là số chính phương. Vì vậy $ T \leq 10$ Dấu bằng xảy ra chẳng hạn tại $T = \{1; 4; 5; 6; 7; 10; 11; 12; 13; 14\}$. Vậy T có nhiều nhất 10 phần tử.	0,5

Chú ý:- Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.

- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.
- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.
- Bài hình học, thí sinh vẽ hình sai ở câu nào thì không chấm điểm câu đó (vẽ hình sai ở đề bài chung thì không chấm điểm toàn bộ bài hình học, tuy nhiên nếu học sinh vẽ $AB > AC$ và làm đúng thì cho nửa số điểm của phần làm đúng)
- Bài hình học, thí sinh không vẽ hình ở câu nào thì cho nửa số điểm của phần làm đúng trong câu đó.
- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.
- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.

ĐỀ DỰ BỊ

ĐỀ THI MÔN: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút.

(Đề thi gồm 01 trang, 05 bài)

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Mỗi bạn An, Bình, Cường viết ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 15 lên bảng. Tính xác suất để tổng của ba số viết lên bảng là một số chia hết cho 3.

b) Một canô xuôi dòng 60 (km) và ngược dòng 48 (km) mất 4 giờ với tốc độ dự định. Nếu canô xuôi dòng 20 (km) và ngược dòng 8 (km) với cùng tốc độ dự định đó thì mất 1 giờ. Tính tốc độ dự định của canô khi nước yên lặng và tốc độ dòng nước.

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $(x^2 + 4)\sqrt{2x + 4} = 3x^2 + 6x - 4$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y \\ x^2 - 1 = 3(1 - y^2) \end{cases}$$

Bài 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, có $AB < AC$. Lấy điểm D, E lần lượt đối xứng với A qua B, C . Đường trung trực của cạnh BC cắt DE tại F . Trong góc $\widehat{CBD}$ vẽ tia Bx , trong góc $\widehat{BCE}$ vẽ tia Cy sao cho $\widehat{DBx} = \widehat{FBC} = \widehat{ECy}$. P là giao điểm của Bx và Cy . Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác PBC . Tiếp tuyến tại P của đường tròn (O) cắt đường thẳng AB, AC lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh bốn điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi giao điểm của (O) với đường thẳng AB, AC lần lượt là H và K (H khác B , K khác C). Chứng minh HK là đường trung bình của tam giác AMN .

c) Giả sử AP cắt đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại Q và S (Q khác P , S khác A). Chứng minh hai đường thẳng CQ và SE song song, từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE .

Bài 4. (1,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2 + \frac{2(x + y + z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Bài 5. (2,0 điểm)

a) Tìm số dư của phép chia $T = \prod_{1 \leq x \leq 107} (1 + x + \dots + x^6)$ khi chia cho 107.

b) Thầy giáo cho bạn A viết 90 số nguyên dương phân biệt lên bảng. Xét tất cả các cặp số (không tính thứ tự) bạn A viết, mỗi khi viết được cặp (a, b) thỏa mãn $100 \leq |a - b| \leq 199$ thì bạn A được 1 điểm. Hỏi bạn A có tổng điểm nhiều nhất là bao nhiêu?

----- HẾT -----

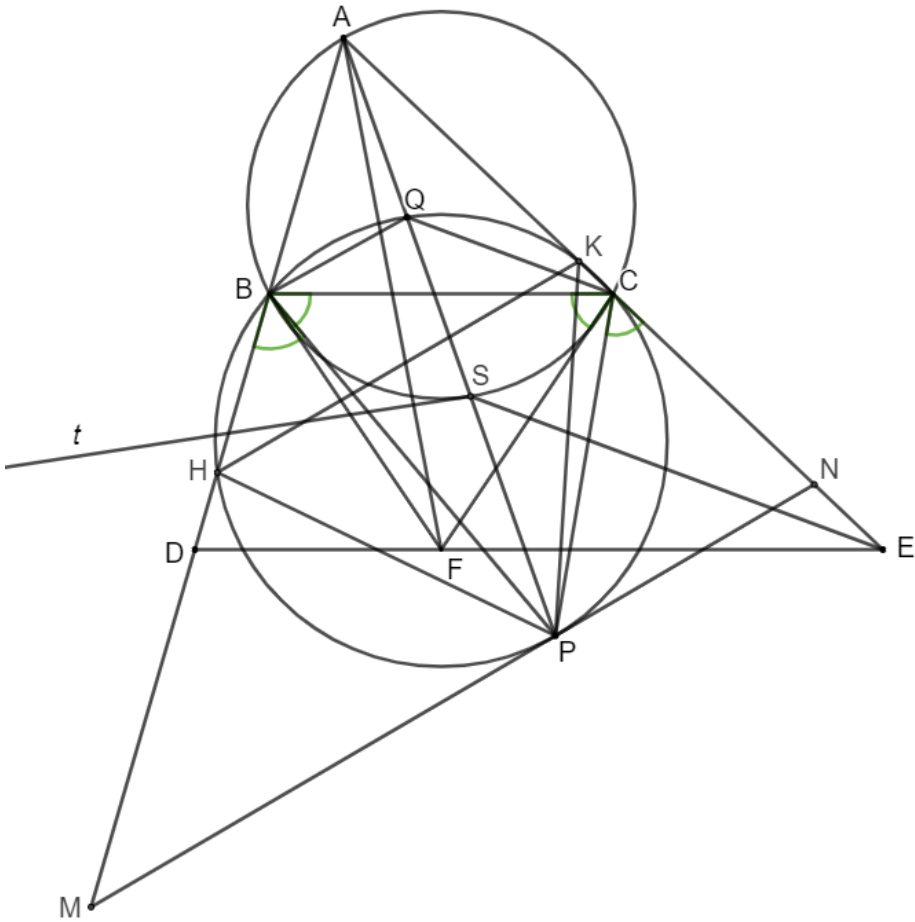
- Thí sinh làm bài trên giấy thi, không sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi số 1: Cán bộ coi thi số 2:

Bài	Đáp án	Điểm
1 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
	$n(\Omega) = 14^3$ TH1: Cả ba số chia hết cho 3: có 4^3 cách chọn TH2: Cả ba số chia 3 dư 1: có 5^3 cách chọn TH3: Cả ba số chia 3 dư 2: có 5^3 cách chọn TH4: Một số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2: $4.5.5.3!$ cách chọn Xác suất cần tìm bằng $\frac{4^3 + 5^3 + 5^3 + 4.5.5.3!}{14^3} = \frac{457}{1372}$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Canô xuôi dòng với tốc độ là $x + y$ (km/giờ), điều kiện: $x > y > 0$. Canô ngược dòng với tốc độ là $x - y$ (km/giờ) Theo đề ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{60}{x+y} + \frac{48}{x-y} = 4 \\ \frac{20}{x+y} + \frac{8}{x-y} = 1 \end{cases}$	0,5
	Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{30} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ x-y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=27 \\ y=3 \end{cases} (t/m)$ Vậy tốc độ của canô khi nước yên lặng là 27 (km/giờ), tốc độ của dòng nước là 3 (km/giờ).	0,5
2 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
	Điều kiện xác định $x \geq -2$ $(x^2 + 4)\sqrt{2x+4} = 3x^2 + 6x - 4$ $\Leftrightarrow (x^2 + 4)\sqrt{2x+4} + x^2 + 4 = 4x^2 + 6x$ $\Leftrightarrow (x^2 + 4)(\sqrt{2x+4} + 1) = 2x(2x+3)$ Có $x = -\frac{3}{2}$ không thỏa mãn. Với $x \neq -\frac{3}{2}$ phương trình $\Leftrightarrow (x^2 + 4)\left(\frac{2x+4-1}{\sqrt{2x+4}-1}\right) = 2x(2x+3)$ $\Leftrightarrow \frac{x^2+4}{\sqrt{2x+4}-1} - 2x = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 + 4 - 2x\sqrt{2x+4} + 2x = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{2x+4} - x)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x = \sqrt{2x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5}$ Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1 + \sqrt{5}$.	0,5
	b) (1,0 điểm)	

	$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y & (1) \\ x^2 - 1 = 3(1 - y^2) & (2) \end{cases}$ $(2) \Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = 4.$ Thay vào (1), ta có: $x^3 - y^3 = \frac{1}{4}(4x + 2y)(x^2 - 3y^2)$ $\Leftrightarrow y(5y^2 + 6xy + x^2) = 0 \Leftrightarrow y(x + 5y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -x \\ x = -5y \end{cases}$	0,25
	Với $y = 0$ thay vào (2) ta được: $x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$	0,25
	Với $y = -x$ thay vào (2) ta được: $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$	0,25
	Với $x = -5y$ thay vào (2) ta được: $y^2 = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = \frac{-5\sqrt{7}}{7} \\ y = -\frac{\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{7}}{7} \end{cases}$	0,25
	Vậy tập nghiệm của hệ đã cho là: $S = \left\{ (2;0); (-2;0); (1;-1); (-1;1); \left(\frac{-5\sqrt{7}}{7}; \frac{\sqrt{7}}{7} \right); \left(\frac{5\sqrt{7}}{7}; -\frac{\sqrt{7}}{7} \right) \right\}$	
3 (3,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
	$\widehat{MDE} = \widehat{MBC} = \widehat{DBP} + \widehat{PBC}.$	0,5
	$= \widehat{PCN} + \widehat{NPC} = \widehat{PNE} \Rightarrow$ Bốn điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.	0,5
	b) (1,0 điểm)	
	$\widehat{PKH} = \widehat{PBD} = \widehat{MPH}, \widehat{PHK} = \widehat{PCE} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{PHK} = \widehat{PKH} \Rightarrow PK = PH \\ \widehat{PHK} = \widehat{HPM} \Rightarrow HK \parallel MN \end{cases}$	0,25
	$\Delta FBC \sim \Delta PKH \Rightarrow \frac{FB}{PK} = \frac{BC}{HK} = \frac{AB}{AK},$	0,25
	mà $\widehat{ABF} = \widehat{ABC} + \widehat{FBC} = \widehat{AKH} + \widehat{PKH} = \widehat{AKP} \Rightarrow \Delta ABF \sim \Delta AKP$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{KAP} \Rightarrow \Delta ADF \sim \Delta ANP \Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AF}{AP} = \frac{AD}{AN} \Rightarrow \frac{AN}{AK} = \frac{AD}{AB} = 2$ $\Rightarrow K$ là trung điểm của AN $\Rightarrow HK$ là đường trung bình của tam giác AMN.	0,25
	c) (1,0 điểm)	

	 $\widehat{ASB} = \widehat{ACB} = \widehat{AED} = \widehat{AMP} \Rightarrow BMPS$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow AS \cdot AP = AB \cdot AM = 2 \cdot AB \cdot AH = 2 \cdot AQ \cdot AP \Rightarrow AS = 2AQ \Rightarrow QC \parallel SE$ Mà $BC \parallel DE \Rightarrow \widehat{SED} = \widehat{QCB} = \widehat{QPB} = \widehat{SMD} \Rightarrow S, E, M, D$ thuộc một đường tròn $\Rightarrow S$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE. Kẻ tiếp tuyến St của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (trong góc $\widehat{BSD}$). $\widehat{BSM} = \widehat{BPM} = \widehat{BCP}$, $\widehat{BS}t = \widehat{BCS} \Rightarrow \widehat{MS}t = \widehat{PCS} = \widehat{SNP} \Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE tại S.	0,25
	$\widehat{ASB} = \widehat{ACB} = \widehat{AED} = \widehat{AMP} \Rightarrow BMPS$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow AS \cdot AP = AB \cdot AM = 2 \cdot AB \cdot AH = 2 \cdot AQ \cdot AP \Rightarrow AS = 2AQ \Rightarrow QC \parallel SE$	0,25
	Mà $BC \parallel DE \Rightarrow \widehat{SED} = \widehat{QCB} = \widehat{QPB} = \widehat{SMD} \Rightarrow S, E, M, D$ thuộc một đường tròn $\Rightarrow S$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE .	0,25
	Kẻ tiếp tuyến St của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (trong góc $\widehat{BSD}$). $\widehat{BSM} = \widehat{BPM} = \widehat{BCP}$, $\widehat{BS}t = \widehat{BCS} \Rightarrow \widehat{MS}t = \widehat{PCS} = \widehat{SNP} \Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE tại S .	0,25
4 (1,0 điểm)	(1,0 điểm)	
	Khai triển vế trái ta có: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geq \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$	0,25
	Áp dụng AM – GM: $\frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}} = \frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}$.	0,25
	Tương tự: $\frac{y}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}$; $\frac{z}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \geq \frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}$. Cộng theo vế, 3 bất đẳng thức trên ta được: $3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq \frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$ Suy ra: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$.	0,25
	Tương tự: $\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.	0,25
5	a) (1,0 điểm)	

(2,0 điểm)	Ta thấy rằng $1 + x + \dots + x^6 = \frac{x^7 - 1}{x - 1}$, với mọi $x \neq 1$. Ta sẽ chứng minh rằng với $a, b \in \mathbb{Z}$ mà $a^7 \equiv b^7 \pmod{107}$ thì $a \equiv b \pmod{107}$.	0,25
	Thật vậy, ta có thể giả sử a, b nguyên tố cùng nhau với 107. Theo định lý Fermat nhỏ thì $a^{106} \equiv b^{106} \equiv 1 \pmod{107}$. Suy ra $a^{106} \equiv b^{106} \equiv b^{105} \cdot b \equiv a^{105} \cdot b \pmod{107}$ nên $a \equiv b \pmod{107}$. Suy ra $2^7 - 1, 3^7 - 1, \dots, 107^7 - 1$ không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 107.	0,25
	Ta có $\prod_{x=2}^{107} (x^7 - 1) \equiv 106! \equiv -1 \pmod{107}$ (theo định lý Wilson). Suy ra $\prod_{x=2}^{107} (x - 1) \cdot \prod_{x=2}^{107} (x^6 + \dots + x + 1) \equiv -1 \pmod{107}$.	0,25
	Do $\prod_{x=2}^{107} (x - 1) \equiv 106! \equiv -1 \pmod{107}$ nên $\prod_{x=2}^{107} (x^6 + \dots + x + 1) \equiv 1 \pmod{107}$, nhân thêm biểu thức khi $x = 1$ vào, ta có $T \equiv 7 \pmod{107}$.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Gọi 90 số nguyên dương này là $t_1, t_2, \dots, t_{90}$ Cặp số $(a; b)$ được gọi là hoàn hảo nếu $100 \leq a - b \leq 199$. Không mất tính tổng quát, xét t_1 là số nằm trong nhiều cặp “hoàn hảo” nhất, cụ thể là k cặp $(t_1, t_2); (t_1, t_3); \dots; (t_1, t_{k+1})$ Khi đó 2 số bất kỳ trong dãy $t_2, t_3, \dots, t_{k+1}$ không thể tạo thành cặp “hoàn hảo”.	0,25
	Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại hai số $i, j \in \{2; 3; \dots; k + 1\}$ mà $i \neq j$ và $100 \leq t_i - t_j \leq 199$ Mặt khác $100 \leq t_1 - t_i \leq 199$ và $100 \leq t_1 - t_j \leq 199$ Nếu $t_1 > t_i > t_j$ thì $100 \leq t_1 - t_i$ và $100 \leq t_i - t_j$ suy ra $t_1 - t_j \geq 200$ (vô lý)	0,25
	Các khả năng khác xét tương tự Do đó giả sử sai Vì vậy, tất cả các cặp hoàn hảo đều chứa một trong các số $t_1, t_{k+2}, \dots, t_{90}$ (có tất cả $90 - k$ số)	0,25
	Mà mỗi số tạo tối đa k cặp hoàn hảo nên: Tổng số cặp hoàn hảo $\leq k(90 - k) \leq \frac{(k + 90 - k)^2}{4} = 2025$ Dấu = xảy ra chẳng hạn tại 90 số đó là 1, 2, 3, ..., 44, 45, 155, 156, ..., 199. Vậy bạn A đạt nhiều nhất 2025 điểm.	0,25

Chú ý:- Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.

- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.
- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.
- Bài hình học, thí sinh vẽ hình sai ở câu nào thì không chấm điểm câu đó (vẽ hình sai ở đề bài chung thì không chấm điểm toàn bộ bài hình học).
- Bài hình học, thí sinh không vẽ hình ở câu nào thì cho nửa số điểm của phần làm đúng trong câu đó.
- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.
- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $ab^2 + bc^2 + ca^2 = abc$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{b}(c+a) + \frac{b}{c}(a+b) + \frac{c}{a}(b+c)$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (3xy-2)^2 + 4x^2 = 5y^2 \\ 2x^2 - 3xy^2 = y(y-2) \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho phương trình $x^2 - 6mx + 18m - 9 = 0$ (1) (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$(x_1^2 - 4mx_1 + 18m - 6)(2mx_2 + 3) = 2m + 9.$$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$ và $0 \leq a, b, c \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a^2 + b^2 + 3c^2 - 2b - 13c$.

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên m để $A = m^3 + 6m^2 + 11m + 6$ là một số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x + y^2 + 1$ chia hết cho xy .

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, không cân và có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . Gọi M, N, I tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF, AH . Các đường thẳng AH, BC theo thứ tự cắt đường thẳng EF tại J, S .

a) Chứng minh rằng $SB \cdot SC = SE \cdot SF = SJ \cdot SN$.

b) Chứng minh rằng J là trực tâm của tam giác IBC .

c) Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC . Chứng minh rằng $\widehat{BIP} = \widehat{CIM}$.

Câu 5 (1,5 điểm). Cho đa giác đều (H) có 2026 đỉnh.

a) Có bao nhiêu tam giác vuông mà các đỉnh là đỉnh của đa giác (H) ?

b) Tại mỗi đỉnh của đa giác (H) , người ta viết một số nguyên dương không vượt quá 1012. Chứng minh rằng tồn tại bốn đỉnh A, B, C, D của đa giác (H) , sao cho $ABCD$ là một hình chữ nhật và $a+b=c+d$ trong đó a, b, c, d tương ứng là các số được viết tại các đỉnh A, B, C, D .

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN
TỈNH NINH BÌNH 2025

Câu 1.

a) Từ giả thiết ta có: $1 = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{abc} = \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{b}(c+a+b) + \frac{b}{c}(a+b+c) + \frac{c}{a}(b+c+a) - a - b - c \\ &= (a+b+c) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - (a+b+c) = 0. \end{aligned}$$

b) Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (3xy-2)^2 + 4x^2 = 5y^2 & (1) \\ 2x^2 - 3xy^2 = y(y-2) & (2) \end{cases}$$

Ta thấy khi $y = 0$ thì từ (2) có $x = 0$, thay vào (1) thì không thỏa mãn.

Xét y khác 0, từ (2) ta có $y(3xy-2) = 2x^2 - y^2 \Leftrightarrow 3xy-2 = \frac{2x^2 - y^2}{y} = \frac{2x^2}{y} - y$.

Thay vào (1) thì

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x^2}{y} - y \right)^2 + 4x^2 &= 5y^2 \Leftrightarrow \frac{4x^4}{y^2} - 4x^2 + y^2 + 4x^2 = 5y^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4x^4}{y^2} &= 4y^2 \Rightarrow x^4 = y^4 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)(x^2+y^2) = 0. \end{aligned}$$

Trường hợp 1: Nếu $x^2 = -y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$, không thỏa mãn.

Trường hợp 2: Nếu $x = y$ thì từ (2)

$$2x^2 - 3x^3 = x(x-2) \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=0(L) \\ x=y=1 \\ x=y=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Trường hợp 3: Nếu $x = -y$ thì từ (2)

$$2x^2 - 3x^3 = -x(-x-2) \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 - x + 2) = 0.$$

Mà $3x^2 - x + 2 > 0$ nên $x = 0$ kéo theo $y = 0$, không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm (x, y) là $(1, 1), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 2.

a) Xét $\Delta' = (3m)^2 - (18m - 9) = (3m - 3)^2 \geq 0, \forall m$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì m khác 1.

Do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên

$$x_1^2 - 6mx_1 + 18m - 9 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 4mx_1 + 18m - 6 = 2mx_1 + 3.$$

Giả sử tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó đẳng thức trở thành:

$$\begin{aligned} 2m + 9 &= (2mx_1 + 3)(2mx_2 + 3) = 4m^2x_1x_2 + 6m(x_1 + x_2) + 9 \\ \Leftrightarrow 2m + 9 &= 4m^2(18m - 9) + 6m \cdot 6m + 9 \\ \Leftrightarrow 2m &= 72m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm \frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại với $m = 0, m = \frac{1}{6}, m = -\frac{1}{6}$ đều thỏa mãn.

Vậy các giá trị m cần tìm là $m = 0, m = \frac{1}{6}, m = -\frac{1}{6}$.

b) Ta có: $3c^2 - 13c \leq c^2 - 2c$. Thật vậy $3c^2 - 13c \leq c^2 - 2c \Leftrightarrow c(2c - 11) \leq 0$ với $0 \leq c \leq 3$.

Khi đó $P \leq 2a^2 + b^2 + c^2 - 2b - 2c \leq 2a^2 + (b + c)^2 - 2(b + c)$

Hay $P \leq 2a^2 + (4 - a)^2 - 2(4 - a) = 3a^2 - 6a + 8$. (*)

Mặt khác $(a + 1)(a - 3) \leq 0 \Leftrightarrow 3(a^2 - 2a - 3) \leq 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 6a + 8 \leq 17$.

Như vậy từ (*) thì $P \leq 17$.

Vậy $\max P = 17$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 3, b = 1, c = 0$.

Câu 3.

a) Giả sử tồn tại m để A là một số chính phương. Ta có $A = (m + 2)(m^2 + 4m + 3)$.

Đặt $d = \gcd(m + 2, m^2 + 4m + 3)$. Khi đó $\begin{cases} d \mid m + 2 \\ d \mid m^2 + 4m + 3 = (m + 2)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow d \mid 1 \Leftrightarrow d = 1$.

Do đó $m+2, m^2+4m+3$ đều là số chính phương.

Giả sử $m^2+4m+3=a^2$, với a nguyên dương. Ta có

$$(m+2)^2 - a^2 = 1 \Leftrightarrow (m+2-a)(m+2+a) = 1.$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} m+2-a=1 \\ m+2+a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ a=0 \end{cases}$. Thử lại $m=-1$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases} m+2-a=-1 \\ m+2+a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ a=0 \end{cases}$. Thử lại $m=-3$ thỏa mãn.

Vậy các giá trị m cần tìm để A là số chính phương là $m=-3, m=-1$.

b) Giả sử tồn tại cặp số nguyên dương (x,y) sao cho $xy \mid x+y^2+1$.

Đặt $x+y^2+1=kxy \Leftrightarrow y^2+1=x(ky-1)$. Trong đó k nguyên dương, hiển nhiên $ky \neq 1$.

Khi đó $ky-1 \mid y^2+1 \Rightarrow ky-1 \mid k(y^2+1) = y(ky-1) + y+k \Rightarrow ky-1 \mid y+k$.

Suy ra $ky-1 \leq y+k \Rightarrow y(k-1) \leq k+1$. (*)

Trường hợp 1: Nếu $k=1$ thì $xy = x+y^2+1 \Leftrightarrow x(y-1) = y^2+1$. (1)

Do đó $y-1 \mid y^2+1 = (y-1)(y+1) + 2 \Rightarrow y-1 \mid 2$. Hay $y \in \{2;3\}$.

Với $y=2$ thay vào (1) thì $x=5$, còn $y=3$ thì $x=5$.

Trường hợp 2: Nếu $k=2$ thì $2xy = x+y^2+1 \Leftrightarrow x(2y-1) = y^2+1$. (2)

Do đó $2y-1 \mid 4(y^2+1) = (2y-1)(2y+1) + 5 \Rightarrow 2y-1 \mid 5$. Hay $y \in \{1;3\}$.

Với $y=1$ thay vào (2) thì $x=2$, còn $y=3$ thì $x=2$.

Trường hợp 3: Nếu $k=3$ thì $3xy = x+y^2+1$ và từ (*) có $y \leq 2 \Rightarrow y \in \{1;2\}$.

Với $y=1$ thay vào (3) thì $x=1$, còn $y=2$ thì $x=1$.

Trường hợp 4: Nếu $k > 3$ thì từ (*) có $y \leq \frac{k+1}{k-1} < 2$. Nên $y=1$.

Ta có: $x \mid x+2 \Rightarrow x \mid 2$. Như vậy có hai bộ $(2,1), (1,1)$.

Tuy nhiên với $x=2, y=1$ thì $k=2$, và với $x=y=1$ thì $k=3$ (vô lý).

Thử lại với các cặp (x,y) sau $(5,2)$ $(5,3)$ $(2,1)$ $(2,3)$ $(1,1)$ $(1,2)$ đều thoả mãn.

Vậy các cặp số nguyên dương (x, y) thoả mãn là $(5,2)$ $(5,3)$ $(2,1)$ $(2,3)$ $(1,1)$ $(1,2)$.

Câu 4.

a) Ta có tam giác BFC vuông tại F và tam giác BEC vuông tại E . Mà M là trung điểm của BC .

Suy ra $MB = MC = ME = MF$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn (M, MB) .

Ta có: $\angle SFB = 180^\circ - \angle BFE = \angle BCE$, và góc FSB chung thì $\triangle SBF \sim \triangle SEC(g.g)$.

$$\text{Khi đó } \frac{SF}{SB} = \frac{SC}{SE} \Leftrightarrow SF \cdot SE = SB \cdot SC. (1)$$

Vì tam giác AEH vuông tại H có I là trung điểm AH nên $IA = IE = IH$.

$$\text{Ta có: } \angle IEM = 180^\circ - \angle IEA - \angle MEC = 180^\circ - \angle IAE - \angle MCE = 90^\circ.$$

$$\text{Tương tự thì } \angle IFM = 90^\circ. \text{ Như vậy } \angle IDM = \angle IEM = \angle IFM = 90^\circ.$$

Ta chứng minh được 5 điểm I, F, E, M, D thuộc một đường tròn.

Do đó tứ giác $DFEM$ nội tiếp suy ra $\angle FDS = 180^\circ - \angle FDM = \angle FEM$, và góc FSB chung.

$$\text{Dẫn đến } \triangle SDF \sim \triangle SEM(g.g) \Rightarrow \frac{SD}{SE} = \frac{SF}{SM} \Leftrightarrow SM \cdot SD = SE \cdot SF. (2)$$

Mặt khác $IE = IF, NE = NF, ME = MF$ nên I, M, N thẳng hàng và IM vuông góc EF tại N .

$$\text{Ta chứng minh được } \triangle SDJ \sim \triangle SNM(g.g) \Rightarrow \frac{SD}{SN} = \frac{SJ}{SM} \Leftrightarrow SM \cdot SD = SN \cdot SJ. (3)$$

$$\text{Từ (1)(2)(3) thì } SB \cdot SC = SE \cdot SF = SN \cdot SJ.$$

b) Ta có $\angle BFE = 180^\circ - \angle BCA = \angle DHE = \angle AHB$.

$$\text{Dẫn đến } \triangle ABH \sim \triangle EBF(g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BF} = \frac{AH}{EF} = \frac{IH}{NF}, \angle BFE = \angle AHB \text{ thì}$$

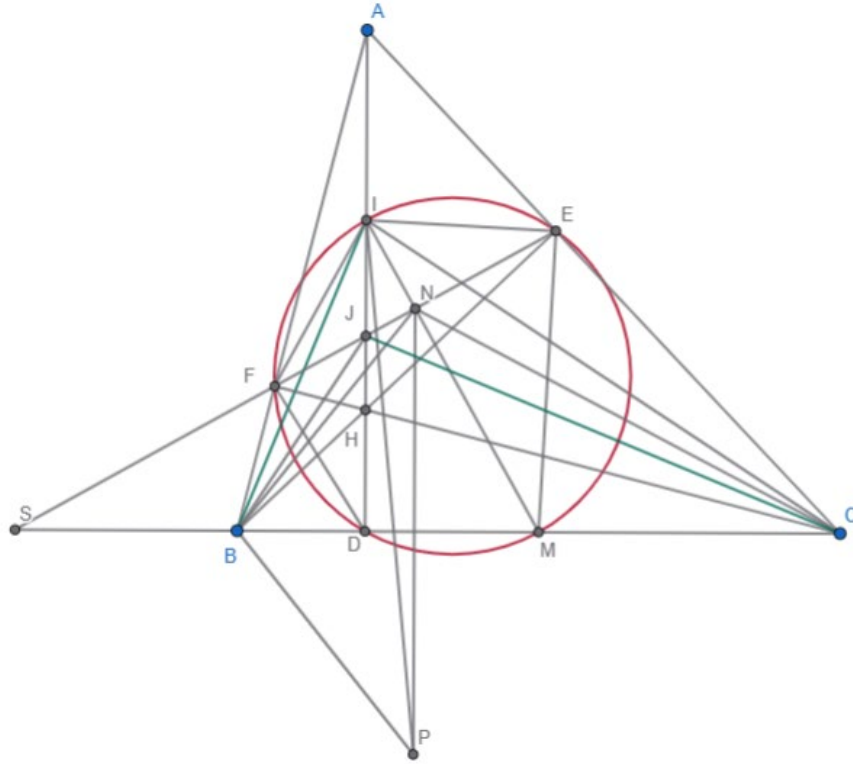
$$\triangle IBH \sim \triangle NBF(c.g.c) \Rightarrow \angle BIH = \angle BNJ. (4)$$

$$\text{Từ câu a } \frac{SB}{SN} = \frac{SJ}{SC} \Rightarrow \triangle SBN \sim \triangle SJC(c.g.c) \Rightarrow \angle SNB = \angle SCJ. (5)$$

Từ (4) (5) thì

$$90 = \angle IBD + \angle BID = \angle IBD + \angle BNJ = \angle IBD + \angle SCJ.$$

Suy ra JC vuông góc IB . Kết hợp với IJ vuông góc BC . Như vậy J là trực tâm của tam giác IBC .



c) Ta có tam giác IEM vuông tại E và IN là đường cao nên

$$MN.MI = ME^2 = MB^2 \Rightarrow \frac{MN}{MB} = \frac{MB}{MI} \Rightarrow \triangle MBN \sim \triangle MIB(c.g.c).$$

$$\text{Suy ra } \frac{MB}{BN} = \frac{MI}{IB} \Rightarrow \frac{MI}{MC} = \frac{BI}{BP}, (BP = BN, MB = MC).$$

$$\text{Và } \angle IBP = \angle IBM + \angle MBP = \angle IBM + \angle MBN = \angle IBM + \angle BIM = \angle IMC$$

$$\text{Do đó } \triangle PBI \sim \triangle CMI(c.g.c).$$

$$\text{Vậy } \angle BIP = \angle MIC.$$

Câu 6.

a. Ta có đa giác đều (H) 2026 đỉnh và có 2026 cạnh, nội tiếp đường tròn (O) nên số đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều là 1013.

Ta chọn 1 đường kính và chọn 1 đỉnh trong 2024 đỉnh còn lại. Suy ra số tam giác vuông được tạo thành là 2024.

Như vậy có tất cả 1013.2024 tam giác vuông mà các đỉnh là đỉnh của đa giác

b. Giả sử XY là một đường kính bất kì của (O) , và viết đỉnh X tương ứng với số x , Y tương ứng với số y . Đồng thời, gán đường kính XY số $|x - y|$.

Do $x, y \in \{1, 2, \dots, 1012\}$ nên dễ thấy $0 \leq |x - y| \leq 1011$. Như vậy 1013 đường kính của đường tròn sẽ được gán các số từ 1, 2, ..., 1011. Theo **nguyên lý Dirichlet** có ít nhất hai đường kính được gán chung một giá trị. Không giảm tính tổng quát, giả sử là hai đường kính AC, BD , trong đó A, B, C, D tương ứng với các số a, b, c, d và $a \geq c, b \leq d$ (nếu không thì đổi tên các đầu mút của đường kính với nhau).

Theo giả thiết thì đường kính AC gán với số $a - c$, còn đường kính BD gán với số $d - b$.

Từ $a - c = d - b \Leftrightarrow a + b = c + d$. Và rõ ràng $ABCD$ là hình chữ nhật.

Như vậy ta có được điều phải chứng minh.

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$, $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}$

với $x > 0, x \neq 4$.

- Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 25$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $C = \frac{B}{A}$ là số nguyên.

Câu 2. (1,0 điểm) Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước trong 4 giờ 48 phút thì đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể nước. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

Câu 3. (1,0 điểm) Có hai hộp I và II chứa các quả cầu có kích thước và khối lượng như nhau. Hộp I chứa 3 quả cầu được đánh số 1; 2; 3. Hộp II chứa 4 quả cầu được đánh số 4; 5; 6; 7, hai quả cầu khác nhau được đánh số khác nhau. Từ mỗi hộp I và II lấy ngẫu nhiên một quả cầu. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

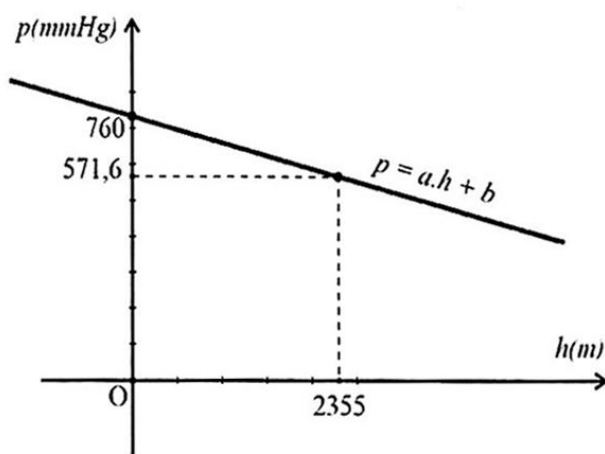
- A : “Số trên hai quả cầu được lấy ra đều là số nguyên tố”.
- B : “Tổng của hai số ghi trên hai quả cầu được lấy ra là một số chia hết cho 2”.

Câu 4. (1,0 điểm)

1) Cho phương trình $x^2 + 7x - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức: $P = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + 7x_1 - 6)^{2025}}$.

2) Càng lên cao không khí càng loãng nên áp suất khí quyển càng giảm. Người ta thấy với độ cao dưới 5000 (m) thì mối liên hệ giữa hai đại lượng này là một hàm số bậc nhất $p = a.h + b$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Trong đó: p là đại lượng biểu thị cho áp suất của khí quyển (mmHg), h là độ cao so với mặt nước biển (m) tại điểm đo áp suất. Những khu vực có độ cao ngang với mặt nước biển ($h = 0$) thì áp suất khí quyển là $p = 760$; thành phố A có độ cao $h = 2355$ thì $p = 571,6$. Một vận động viên leo núi, tại điểm dừng chân đo được áp suất khí quyển là 540 mmHg. Hãy tính độ cao của điểm dừng chân (so với mực nước biển).



Câu 5. (4,0 điểm)

1) Một lọ nước hoa có hình dạng bên ngoài là hình cầu làm bằng thủy tinh có đường kính 8 cm . Lòng bên trong của lọ cũng là một hình cầu nhỏ cùng tâm với hình cầu bên ngoài để chứa nước hoa. Hỏi phải làm thành lọ có độ dày là bao nhiêu cm để chứa được lượng nước hoa là 120 ml ? (kết quả làm tròn ở bước cuối cùng, lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn đến hàng phần mười). Biết rằng lượng nước hoa được chứa trong lọ chiếm 80% thể tích của phần có thể chứa nước hoa.



2) Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, trên đoạn OA lấy điểm I ($I \neq A; I \neq O$). Kẻ tia Ix vuông góc với AB cắt (O) tại C . Lấy điểm E trên cung nhỏ BC ($E \neq B; E \neq C$), AE cắt CI tại F . Gọi D là giao điểm của đường thẳng BC với tiếp tuyến tại A của $(O; R)$.

a) Chứng minh bốn điểm B, E, F, I cùng nằm trên một đường tròn.

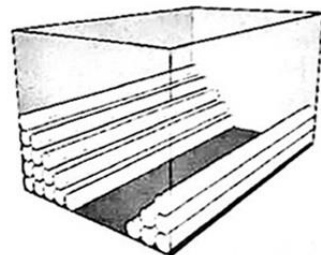
b) Chứng minh $AE \cdot AF = CB \cdot CD$.

c) Khi điểm E di chuyển trên cung nhỏ BC với giả thiết $AB = 2AC$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = 2025 \cdot BE \cdot CE$.

Câu 6. (1,0 điểm)

1) Cho a, b là hai số thực dương. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

2) Một viên gạch có dạng hình trụ với đường kính đáy 1 cm , chiều dài 6 cm . Người ta xếp 120 viên gạch thành a hàng và b cột ($a, b \in \mathbb{N}^*$) đặt vừa khít vào một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật làm bằng bìa cứng. Tìm a, b sao cho vật liệu cần dùng để làm chiếc hộp đó tiết kiệm nhất (coi diện tích các mép nối là không đáng kể).



----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN SƠN LA
Năm học 2025 – 2026

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Thay $x = 25$ vào A ta được : $A = \frac{2\sqrt{25}+3}{5.25-10\sqrt{25}} = \frac{2.5+3}{125-10.5} = \frac{13}{75}$

Thay $x = 25$ vào B ta được :

$$B = \frac{2}{\sqrt{25}-2} + \frac{3}{2\sqrt{25}+1} - \frac{5\sqrt{25}-7}{2.25-3\sqrt{25}-2} = \frac{2}{5-2} + \frac{3}{2.5+1} - \frac{5.5-7}{50-3.5-2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{11} - \frac{18}{33} = \frac{13}{33}$$

Vậy tại $x = 25$ thì giá trị của biểu thức $A = \frac{13}{75}$ và $B = \frac{13}{33}$

b) Với $x > 0, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{4\sqrt{x}+2+3\sqrt{x}-6-5\sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}. \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}$, với $x > 0, x \neq 4$

c) Với $x > 0, x \neq 4$, ta có:

$$C = \frac{B}{A} = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$$

Giả sử C nguyên thì C là số nguyên dương, ta có: $0 < \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} < 3$.

Nếu $C = 1 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$. (thỏa mãn)

Nếu $C = 2 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x = 4$. (loại)

Như vậy để C nguyên thì $x = \frac{1}{9}$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Gọi phần nước chảy được vào bể của vòi thứ nhất, hai sau 1 giờ lần lượt là x, y (phần bể)

Điều kiện: $x > 0, y > 0$. Đổi 4 giờ 48 phút = 4,8 giờ

Nếu hai vòi cùng chảy thì sau 1 giờ chảy được: $x + y$ (phần bể)

Vì hai vòi cùng chảy thì sau 4,8 giờ là đầy bể, nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{x+y} = 4,8 \Leftrightarrow 4,8(x+y) = 1 \Leftrightarrow 48x + 48y = 10 \Leftrightarrow 24x + 24y = 5 \quad (1)$$

Vì nếu cho vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ hai chảy trong 4 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể, nên ta có

$$\text{phương trình: } 3x + 4y = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 12x + 16y = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 24x + 24y = 5 \\ 12x + 16y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{12} \\ y = \frac{1}{8} \end{cases} \quad (\text{thoả mãn})$$

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng thì mất $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{12}} = 12$ (giờ) thì đầy bể và vòi thứ hai chảy riêng thì mất

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8 \text{ (giờ) thì đầy bể.}$$

Câu 3(1,0 điểm)

Từ mỗi hộp I và II lấy ngẫu nhiên một quả cầu, suy ra $n(\Omega) = 3.4 = 12$

a) Hộp I có chứa 2 quả cầu được đánh số là số nguyên tố: $\{2;3\}$

Hộp II có chứa 2 quả cầu được đánh số là số nguyên tố: $\{5;7\}$

Suy ra, số trường hợp thoả mãn biến cố A là $n(A) = 2.2 = 4$

Vậy, xác suất của biến cố A là:
$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

b) Hộp I có chứa 1 quả cầu được đánh số là số chẵn: $\{2\}$ và chứa 2 quả cầu được đánh số là số lẻ: $\{1;3\}$. Hộp II có chứa 2 quả cầu được đánh số là số chẵn: $\{4;6\}$ và chứa 2 quả cầu được đánh số là số lẻ: $\{5;7\}$

Để tổng của hai số ghi trên hai quả cầu lấy được là một số chia hết cho 2 thì số ghi trên hai quả cầu hoặc cùng chẵn, hoặc cùng lẻ.

TH1: số ghi trên hai quả cầu là cùng chẵn, có $1.2 = 2$ (trường hợp)

TH2: số ghi trên hai quả cầu là cùng lẻ, có $2.2 = 4$ (trường hợp)

Suy ra, có $2 + 4 = 6$ trường hợp để thoả mãn biến cố B, hay $n(B) = 6$

Vậy xác suất của biến cố B là
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Câu 4(1,0 điểm)

1) Phương trình $x^2 + 7x - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 nên theo Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$$

Và $x_1^2 + 7x_1 - 5 = 0$

Ta có:
$$P = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + 7x_1 - 6)^{2025}} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{[(x_1^2 + 7x_1 - 6) - 1]^{2025}} = \frac{(-7)^2 - 2 \cdot (-5)}{(0 - 1)^{2025}} = \frac{59}{-1} = -59.$$

Vậy $P = -59$.

2) Theo đề bài, hàm số biểu thị mối liên hệ giữa độ cao (h) và áp suất khí quyển (p) là $p = a.h + b$ với $a \neq 0, 0 \leq h \leq 5000$

Tại $h = 0$ thì $p = 760$ nên ta có: $760 = a.0 + b \Leftrightarrow b = 760$ (1)

Tại $h = 2355$ thì $p = 571,6$ nên ta có: $2355a + b = 571,6$ (2)

Từ (1) và (2), ta có:
$$\begin{cases} b = 760 \\ 2355a + b = 571,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 760 \\ 2355a + 760 = 571,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 760 \\ a = -0,08 \end{cases}$$

Khi đó, hàm số biểu thị mối liên hệ giữa độ cao (h) và áp suất khí quyển (p) là $p = -0,08h + 760$

Áp suất khí quyển của vận động viên tại điểm dừng chân là $p = 540$, nên ta có $540 = -0,08h + 760$

Suy ra, độ cao của vận động viên tại điểm dừng chân là $h = \frac{540 - 760}{-0,08} = 2750(m)$

Vậy độ cao của điểm dừng chân so với mực nước biển là $h = 2750(m)$

Câu 5:

1) Thể tích lượng nước hoa: $V = 120(ml) = 120(cm^3)$

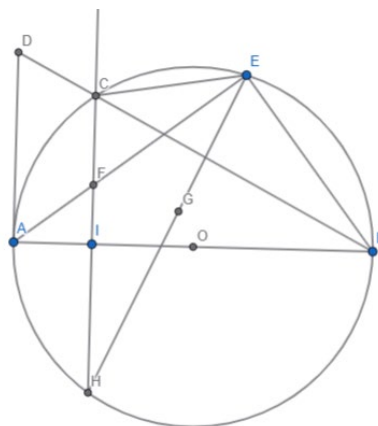
Thể tích của hình cầu chứa nước hoa: $V = 120 : 80\% = 150(cm^3)$

Bán kính của hình cầu chứa nước hoa: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow 150 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R^3 = \frac{225}{2\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}}$

Độ dày thành lọ nước hoa: $\frac{8}{2} - \sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}} \approx 0,7(cm)$

Vậy độ dày thành lọ hoa thỏa mãn là $0,7\text{ cm}$.

2) Ta có hình vẽ:



a) Ta thấy E thuộc đường tròn đường kính AB nên $\angle AEB = 90^\circ$, mà kết hợp với $\angle FIB = 90^\circ$ nên các điểm F, I, B, E đồng viên.

b) Tam giác AIF đồng dạng tam giác AEB (g.g), nên suy ra $\frac{AI}{AE} = \frac{AF}{AB}$ hay $AI \cdot AB = AF \cdot AE$.

Mặt khác do tam giác ACB vuông tại C có đường cao CI nên chứng minh được $AC^2 = AI \cdot AB$

Và tam giác DAB vuông tại A , đường cao AC nên $AC^2 = CD \cdot DB$

Như vậy $AE \cdot AF = CD \cdot DB$

c) Khi $AB = 2AC$ suy ra $AC = R$ hay tam giác ACO đều và I là trung điểm AO .

Gọi CI cắt (O) tại H . Ta có CBH là tam giác cân tại B và $CBH = 60^\circ$ hay tam giác CHB đều.

Gọi G trên HE sao cho $CE = EG$.

Ta có: $CEG = 60^\circ$ nên tam giác CEG đều, ta chứng minh được $HCG = BCE$ (*)

Suy ra tam giác $CGH =$ tam giác CEB (c.g.c) do $CE = CG$, $AC = AB$ và do (*)

Khi đó $BE = HG$. Như vậy $CE + EB = EH$

$$\text{Ta có } S = 2025 \cdot BE \cdot CE \leq 2025 \cdot \frac{(BE + CE)^2}{4} = 2025 \cdot \frac{EH^2}{4} \leq 2025 \cdot R^2$$

Do $EH \leq 2R$. Như vậy $\text{Max } S = 2025 \cdot R^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi E, H, O thẳng hàng.

Lưu ý: Một số kết thức về góc nội tiếp, góc tạo tiếp tuyến và dây cung, HS tự chứng minh lại.

Câu 6.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Như vậy BĐT được chứng minh và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

b) Ta có diện tích toàn phần của hộp phân là: $V = 2(ab + 6a + 6b)$

Mà ta có $ab = 120$ (1) $\Rightarrow V = 12(a+b) + 240$

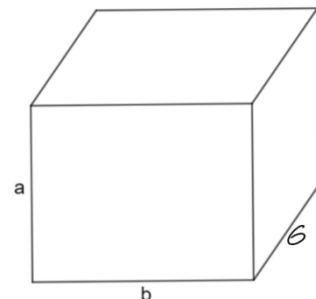
Chú ý $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên $a, b \geq 1$.

Ta có $a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{120} > 21$

Để V đạt giá trị bé nhất thì ta có $a+b = 22$. (2)

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} a=10, b=12 \\ a=12, b=10 \end{cases}$$

Để vật liệu cần dùng để làm chiếc hộp đó tiết kiệm nhất thì $a = 10, b = 12$ hoặc $a = 12, b = 10$.



ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức $P = \frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$.

a. Rút gọn biểu thức P .

b. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho $P(x)$ là đa thức có tất cả các hệ số nguyên. Biết rằng, $P(2025)$ và $P(2026)$ là các số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng, đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Câu 3 (1,0 điểm). Lớp 9D có 45 học sinh, mỗi bạn đều biết chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: đá cầu, bóng đá. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp đó. Xét các biến cố:

A : "Học sinh được chọn biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá";

B : "Học sinh được chọn biết chơi môn đá cầu".

Biết rằng, xác suất của biến cố A bằng $\frac{2}{9}$, xác suất của biến cố B bằng $\frac{2}{3}$. Tính xác suất của biến cố C : "Học sinh được chọn biết chơi môn bóng đá".

Câu 4 (2,0 điểm).

a. Cho số nguyên dương n là tích của ba số nguyên tố phân biệt. Biết rằng, tổng tất cả các ước nguyên dương của n bằng $2n-16$. Chứng minh rằng, $n-8$ chia hết cho 6.

b. Cho p là số nguyên tố thỏa mãn $p-1$ chia hết cho 4. Chứng minh rằng, $p^3 - p^2 - 4$ không phải là số chính phương.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Gọi BH và CQ là hai đường cao của tam giác ABC . Tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại M . Hai đường thẳng OM và BC cắt nhau tại N .

a. Chứng minh rằng, $\widehat{ABO} = \widehat{BHN}$.

b. Đường thẳng OM cắt đường tròn (O) tại D và S (D nằm giữa O và M). Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại F . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN . Chứng minh rằng, hai đường thẳng OI và AS vuông góc với nhau.

c. Hai đường thẳng AM và BC cắt nhau tại E . Hai đường thẳng AN và HQ cắt nhau tại G . Chứng minh rằng, hai đường thẳng GE và OM song song với nhau.

Câu 6 (1,0 điểm). Bạn Thái viết ra bảng 100 số nguyên dương đôi một phân biệt, mỗi số không lớn hơn 2^{98} . Đối với mỗi cặp số (a, b) được bạn Thái viết ra, bạn Nguyên viết số $a+b - \text{ƯCLN}(a, b)$ trên bảng. Chứng minh rằng, có ít nhất một số trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các số mà bạn Thái viết.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN TỈNH THÁI NGUYÊN
Năm học 2025 – 2026

Câu 1.

a. ĐKXĐ: $\begin{cases} x+2\sqrt{x}-3 \neq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$. Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có

$$P = \frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} = \frac{3x+4\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{3x+4\sqrt{x}-7 - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b. Với $x \geq 0, x \neq 1$, có $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$.

Để P nguyên thì $\frac{2}{\sqrt{x}-1}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$, kết hợp $x \geq 0, x \neq 1 \Rightarrow x \in \{0; 4; 9\}$

Vậy tập giá trị nguyên của x thỏa mãn là $\{0; 4; 9\}$.

Câu 2. Giả sử đa thức $P(x)$ bậc $n \geq 1$ thỏa mãn $P(2025), P(2026)$ là số tự nhiên và có nghiệm nguyên a . Khi đó theo định lý Bezout thì $P(x) = (x-a).Q(x)$, với $\deg Q(x) = n-1$.

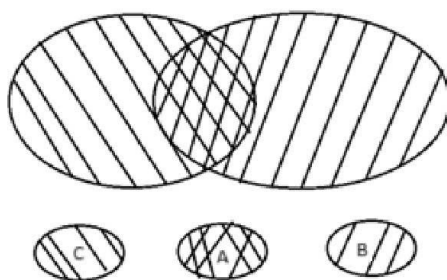
Ta có: $P(2025)P(2026) = (2025-a).Q(2025).(2026-a).Q(2026)$.

Do $2025-a, 2026-a$ là hai số nguyên liên tiếp nên $(2025-a)(2026-a)$ chẵn.

Mặt khác $P(2025)P(2026)$ lẻ. Do đó xảy ra điều mâu thuẫn.

Vậy đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Câu 3.



Hình chứa C, B lần lượt là tập các HS biết chơi môn đá cầu và bóng đá. Hình chứa A là tập các HS biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá. Gọi số phần tử tập chứa A, B, C lần lượt là n_A, n_B, n_C .

Gọi xác suất của biến cố A, B, C lần lượt là p_A, p_B, p_C . Theo giả thiết thì $p_A = \frac{2}{9}, p_B = \frac{2}{3}$.

Cách 1: Số học sinh biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá là $n_A = p_A \cdot 45 = \frac{2}{9} \cdot 45 = 10$ học sinh.

Số học sinh biết chơi môn đá cầu là $n_B = p_B \cdot 45 = \frac{2}{3} \cdot 45 = 30$ học sinh.

$\Rightarrow$ Số học sinh biết chơi môn đá bóng là: $n_C = 45 - 30 + 10 = 25$ học sinh.

$\Rightarrow$ Xác suất biến cố C là: $p_C = \frac{n_C}{45} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.

Cách 2: Xác suất biến cố C là

$$p_C = 1 - p_B + p_A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$

Vậy $p_C = \frac{5}{9}$

Câu 4.

a. Giả sử $n = pqr$, với p, q, r là các số nguyên tố phân biệt.

Ta có các ước dương của n là $1, p, q, r, pq, qr, pr, pqr$. Theo giả thiết thì

$$2n - 16 = 1 + p + q + r + pq + qr + rp + pqr = (1 + p)(1 + q)(1 + r).$$

$$\text{Tức là } 4 \mid (1 + p)(1 + q)(1 + r). \quad 2pqr - 16 = (1 + p)(1 + q)(1 + r).$$

Trong p, q, r phải có ít nhất hai số nguyên tố lẻ. Suy ra $4 \mid (1 + p)(1 + q)(1 + r) = 2(n - 8)$.

Hay nói cách khác $2 \mid n - 8$. (1)

Giả sử ta p, q, r là các số nguyên tố chia cho 3 dư 1, thì có $p + 1, q + 1, r + 1$ chia cho 3 dư 2.

Do đó $(1 + p)(1 + q)(1 + r)$ chia cho 3 dư 2 và $2pqr$ chia cho 3 dư 2.

Suy ra $16 = 2pqr - (1 + p)(1 + q)(1 + r)$ chia hết cho 3. Dẫn đến điều vô lý.

Như vậy trong ba số tồn tại một số chia cho 3 dư 2.

$$\text{Khi đó } 3 \mid (1 + p)(1 + q)(1 + r) = 2(n - 8) \text{ hay } 3 \mid n - 8. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $n - 8$ chia hết cho 6.

b. Giả sử $p^3 - p^2 - 4$ là số chính phương, đặt $p^3 - p^2 - 4 = a^2$.

$$\text{Khi đó } a^2 = (p - 2)(p^2 + p + 2).$$

$$\text{Đặt } d = \gcd(p - 2, p^2 + p + 2). \text{ Suy ra } d \mid (p - 2)(p + 3) + 8 \Rightarrow d \mid 8.$$

- Nếu d chẵn thì $p - 2$ chẵn và kéo theo $p - 1$ lẻ, vô lý do $4 \mid p - 1$.

- Nếu $d = 1$. Khi đó $p - 2, p^2 + p + 2$ đều là số chính phương.

Do $p-1$ chia hết cho 4 nên $p-2$ chia cho 4 dư 3, suy ra $p-2$ không thể là số chính phương (do số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1). Như vậy điều giả sử là sai.

Vậy $p^3 - p^2 - 4$ không thể là số chính phương.

Chú ý: ở trên ta dùng tính chất: Nếu hai số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau và tích ab là số chính phương thì a, b đều là số chính phương. **HS tự chứng minh.**

Câu 5.

a. Ta có tam giác ABO cân tại O và tam giác HNB cân tại N nên $\angle BHN = \angle NBH$.

Ta có biến đổi góc như sau

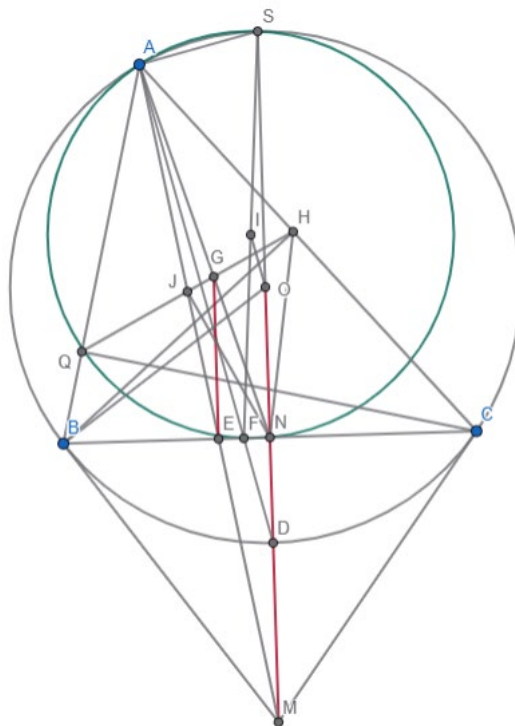
$$\angle ABO = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle ACB}{2} = 90^\circ - \angle ACB = \angle HBN = \angle BHN.$$

b. Do DS đi qua O nên DS là đường kính của đường tròn (O) . Suy ra $\angle SAF = 90^\circ$.

Ta thấy SM vuông góc BC tại N nên $\angle SNF = 90^\circ$.

Khi đó ta chứng minh được tứ giác $ASNF$ nội tiếp. Mà do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN nên tứ giác $ASNF$ nội tiếp đường tròn (I) có đường kính là SF .

Do đó ta có: $\begin{cases} OA = OS \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow OI$ là đường trung trực của AS nên OI vuông góc AS .



c. Ta có N là trung điểm của BC , suy ra $NQ = NH = NB = NC$.

Gọi J là trung điểm GH thì NJ vuông góc với GH . Ta có:

$$\frac{AH}{HN} = \frac{\sin \angle ABH \cdot AB}{HN} = \sin \left(\frac{\angle HNQ}{2} \right) \cdot \frac{AB}{HN} = \sin \angle HNJ \cdot \frac{AB}{HN} = \frac{JH \cdot AB}{HN^2} = \frac{HQ \cdot AB}{NQ \cdot BC} \quad (1)$$

Ta có biến đổi góc:

$$\angle BMC = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 2\angle BAC = 180^\circ - 2(90^\circ - \angle ACQ) = \angle HNQ.$$

Chú ý tam giác HNQ cân tại N và BCM cân tại M nên

$$\triangle QNH \sim \triangle BMC \Rightarrow \frac{HQ}{BC} = \frac{QN}{BM} \Rightarrow \frac{HQ}{QN \cdot BC} = \frac{1}{BM}. (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AH}{HN} = \frac{AB}{BM} (3)$

Ta có: $\angle AHN = \angle AHQ + \angle QHN = \angle ABC + \angle MBC = \angle ABM (\triangle AQH \sim \triangle ACB). (4)$

Từ (3) (4) suy ra $\triangle AHN \sim \triangle ABM (c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} \angle NAH = \angle MAB (5) \\ \frac{AN}{AM} = \frac{AH}{AB} (*) \end{cases}.$

Từ (5) suy ra $\triangle AHG \sim \triangle ABE (g.g) \Rightarrow \frac{AG}{AE} = \frac{AH}{AB} (**)$

Từ (*) và (**) thì $\frac{AG}{AE} = \frac{AN}{AM} \Rightarrow GE \parallel OM$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 6.

Ta thấy các số mà bạn Nguyên viết ra đều là số nguyên dương. Gọi 100 số mà Thái viết ra bằng là $a_1 < a_2 < \dots < a_{100}, (a_i \in \mathbb{N}^*)$. Giả sử không tồn tại số nào trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các mà bạn Thái viết.

Như vậy với mọi $1 \leq i < j \leq 100$, thì $a_i + a_j - \gcd(a_i, a_j) \in S, S = \{a_1; a_2; \dots; a_{100}\}$.

Khi đó $a_{99} + a_{100} - \gcd(a_{99}, a_{100}) \in S$. Ta thấy $a_{99} < a_{99} + a_{100} - \gcd(a_{99}, a_{100})$. Suy ra

$$a_{99} + a_{100} - \gcd(a_{99}, a_{100}) = a_{100} \Leftrightarrow \gcd(a_{99}, a_{100}) = a_{99} \Rightarrow a_{99} \mid a_{100}. (1)$$

Bây giờ, $a_{98} < a_{98} + a_{99} - \gcd(a_{98}, a_{99})$.

Nếu $a_{98} + a_{99} - \gcd(a_{98}, a_{99}) = a_{100} \Rightarrow a_{99} \mid a_{98} - \gcd(a_{98}, a_{99})$, do (1)

Suy ra $a_{99} \leq a_{98} - \gcd(a_{98}, a_{99}) < a_{98}$, vô lý. Như vậy

$$a_{98} + a_{99} - \gcd(a_{98}, a_{99}) = a_{90} \Rightarrow a_{98} \mid a_{99} \mid a_{100}.$$

Bây giờ, $a_{97} < a_{97} + a_{98} - \gcd(a_{97}, a_{98}) \Rightarrow a_{97} + a_{98} - \gcd(a_{97}, a_{98}) \in \{a_{98}, a_{99}, a_{100}\}$.

Tương tự như trên thì $a_{97} \mid a_{98} \mid a_{99} \mid a_{100}$.

Lặp lại quá trình như vậy thì ta có $a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_{98} \mid a_{99} \mid a_{100}$.

Ta đặt $a_{i+1} = q_i \cdot a_i$ với $q_i \in \mathbb{N}^*, q_i \neq 1, \forall i = \overline{1, 99}$.

Ta thấy $a_{100} = q_{99} q_{98} \dots q_1 a_1 \geq 2^{99}$. Mà a_{100} không lớn hơn 2^{98} . Suy ra mâu thuẫn.

Như vậy có ít nhất một số trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các mà bạn Thái viết.

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: TOÁN
Ngày thi: 07 tháng 6 năm 2025

(Đề thi gồm 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút (Không tính thời gian phát đề)

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Với a, b là các số thực dương thỏa mãn $(a + b)(a - b) = 1$. Tính giá trị của biểu thức

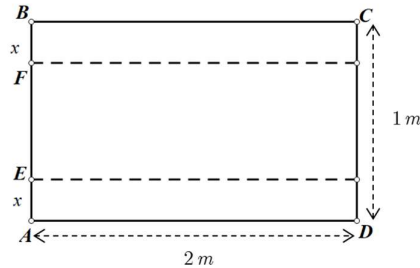
$$P = \sqrt{(4a + 5)^2 + (3b)^2} - \sqrt{(4a - 5)^2 + (3b)^2}.$$

b) Biết a, b là hai nghiệm thực của phương trình $x^2 - 4x + c = 0$ và $-a$ là một nghiệm thực của phương trình $11x^2 - x + 2c = 0$ với c là một số thực khác 0. Tính giá trị của biểu thức $a^{2025} + b^{2025} + c^{2025}$.

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Một ô tô và một xe tải chuyển động cùng tốc độ không đổi $a(km/h)$ dọc theo hai con đường giao nhau hướng đến giao lộ ($a > 0$). Biết rằng vào các thời điểm 14 giờ và 15 giờ cùng ngày, khoảng cách từ ô tô đến giao lộ đều gấp đôi khoảng cách từ xe tải đến giao lộ. Hỏi xe tải đến giao lộ lúc mấy giờ?

b) Anh Hà dự định làm một cái máng nước có dạng hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang cân từ một miếng tôn có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài 2 (m) và chiều rộng 1 (m). Anh Hà thực hiện làm máng nước bằng cách gấp đều hai bên chiều rộng AB của miếng tôn, mỗi bên $x(m)$, lên một góc 60° như hình vẽ. Tìm x để hình thang cân $EFGH$ có diện tích lớn nhất?



Bài 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có BE, CF là các đường cao. Gọi M, K theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF . Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AM và EF . Kẻ ND vuông góc với BC tại D .

a) Chứng minh rằng $\widehat{AKE} = \widehat{AMB}$ và ba điểm A, K, D thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại Q . Chứng minh rằng $QB \cdot DC = QC \cdot DB$.

Bài 4. (1,5 điểm)

Số nguyên dương n được gọi là số **đẹp** nếu tồn tại các số nguyên a, b sao cho $n = a^2 + 7b^2$.

a) Tìm hai số **đẹp** có hai chữ số và chia hết cho 11.

b) Chứng minh rằng nếu n là số **đẹp** và n chia hết cho 11 thì $\frac{n}{11}$ cũng là số **đẹp**.

Bài 5. (1,5 điểm)

a) Gọi S là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 100. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên a thuộc tập S . Tính xác suất sao cho số a được chọn thỏa mãn các nghiệm của phương trình $x^2 - ax + 2a + 10 = 0$ đều là số nguyên.

b) Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 100\}$ và tập hợp B là tập hợp con chứa 11 phần tử của tập hợp A . Chứng minh rằng tập hợp B luôn chứa ba số a, b, c phân biệt sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

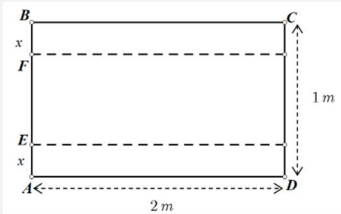
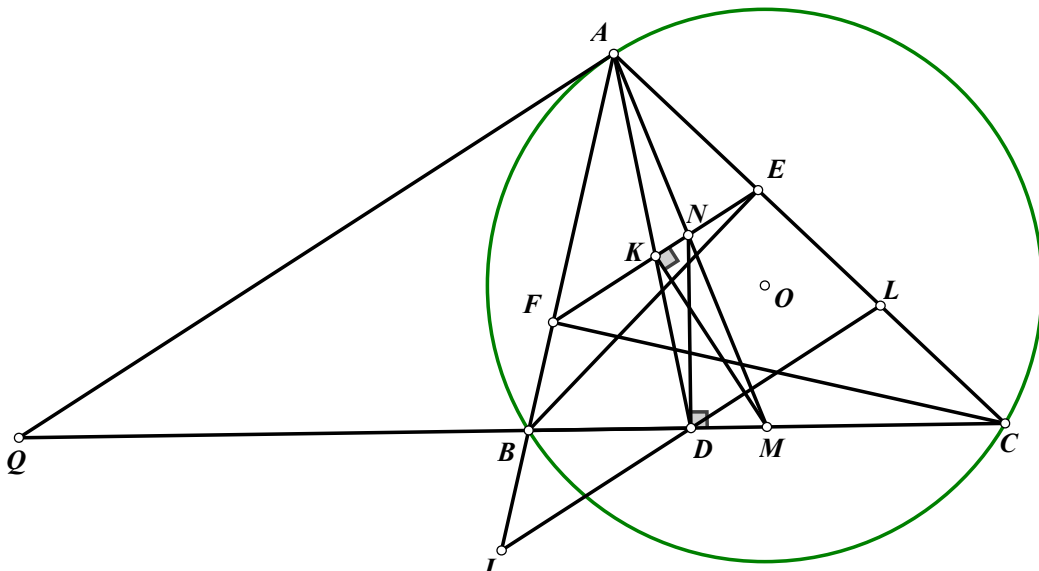
-HẾT-

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên:..... Số báo danh:.....

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

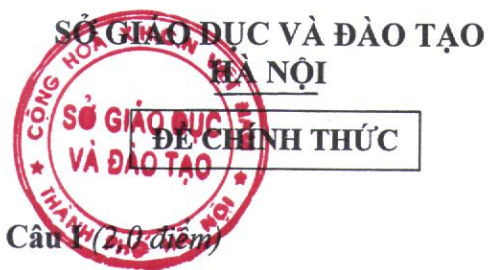
Bài 1. (2,0 điểm)	
a) Với a, b là các số thực dương thỏa mãn $(a + b)(a - b) = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{(4a + 5)^2 + (3b)^2} - \sqrt{(4a - 5)^2 + (3b)^2}$.	1,0 điểm
Ta có $(a + b)(a - b) = 1 \Rightarrow b^2 = a^2 - 1$	0,25 điểm
Do đó $P = \sqrt{(4a + 5)^2 + 9(a^2 - 1)} - \sqrt{(4a - 5)^2 + 9(a^2 - 1)}$	0,25 điểm
$= \sqrt{(5a + 4)^2} - \sqrt{(5a - 4)^2}$	0,25 điểm
$= 5a + 4 - 5a - 4 $ mà $b^2 = a^2 - 1 > 0$ nên $a > 1$, do đó $P = (5a + 4) - (5a - 4) = 8$.	0,25 điểm
b) Biết a, b là hai nghiệm thực của phương trình $x^2 - 4x + c = 0$ và $-a$ là một nghiệm của phương trình $11x^2 - x + 2c = 0$ với c là một số thực khác 0. Tính giá trị của biểu thức $a^{2025} + b^{2025} + c^{2025}$.	1,0 điểm
Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = c \end{cases}$	0,25 điểm
$-a$ là một nghiệm của phương trình $11x^2 - x + 2c = 0$ nên $11a^2 + a + 2c = 0$	0,25 điểm
Từ đó ta có được $11a^2 + a + 2ab = 0 \Rightarrow 11a^2 + a + 2a(4 - a) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = -1$	0,25 điểm
Với $a = 0$ thì $b = 4; c = 0$ (loại) Với $a = -1$ thì $b = 5; c = -5$ (nhận) Vậy $a^{2025} + b^{2025} + c^{2025} = -1$.	0,25 điểm
Bài 2. (2,0 điểm)	
a) Một ô tô và một xe tải đang chuyển động cùng tốc độ không đổi $a (km/h)$ dọc theo hai con đường giao nhau hướng đến giao lộ ($a > 0$). Biết rằng vào các thời điểm 14 giờ và 15 giờ cùng ngày, khoảng cách từ ô tô đến giao lộ đều gấp đôi khoảng cách từ xe tải đến giao lộ. Hỏi xe tải đến giao lộ lúc mấy giờ?	1,0 điểm
Gọi $x (km)$ là khoảng cách từ xe tải đến giao lộ lúc 14 giờ ($x > 0$), $2x (km)$ là khoảng cách từ xe ô tô đến giao lộ lúc 14 giờ	0,25 điểm
Ta có $ 2x - a = 2 x - a $	0,25 điểm
$\Rightarrow 4x^2 - 4ax + a^2 = 4(x^2 - 2ax + a^2) \Rightarrow 4ax - 3a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0(l) \\ x = \frac{3a}{4}(n) \end{cases}$	0,25 điểm
Suy ra thời gian để xe tải đi từ lúc 14 giờ đến giao lộ là $\frac{x}{a} = \frac{3}{4}$ (giờ) Vậy xe tải đến giao lộ lúc 14 giờ 45 phút.	0,25 điểm

b) Anh Hà dự định làm một cái máng nước có dạng hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang cân từ một miếng tôn có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài 2 m và chiều rộng 1 m. Anh Hà thực hiện làm máng nước bằng cách gấp đều hai bên chiều rộng AB của miếng tôn, mỗi bên $x(m)$, lên một góc 60° như hình vẽ. Tìm x để hình thang cân $EFGH$ có diện tích lớn nhất?	
	1,0 điểm
Ta có $EF = 1 - 2x$; $GH = 1 - x$ Khoảng cách từ H xuống AB là $h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$	0,25 điểm
Diện tích hình thang $S_{EFGH} = \frac{GH + EF}{2}h = \frac{\sqrt{3}}{4}x(2 - 3x)$	0,25 điểm
$= \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 3x(2 - 3x) \leq \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{3x + 2 - 3x}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}$	0,25 điểm
Vậy diện tích hình thang lớn nhất khi $3x = 2 - 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}(m)$.	0,25 điểm
Bài 3. (3,0 điểm)	
Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có BE, CF là các đường cao. Gọi M, K theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AM và EF. Kẻ ND vuông góc với BC tại D. a) Chứng minh $\widehat{AKE} = \widehat{AMB}$ và ba điểm A, K, D thẳng hàng. b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại Q. Chứng minh rằng $QB \cdot DC = QC \cdot DB$.	3,0 điểm
	

a) Chứng minh được tứ giác $BCEF$ nội tiếp suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AEF}$ (1)	0,25 điểm
suy ra $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{2EK}{2BM} = \frac{EK}{BM}$ (2)	0,25 điểm
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle AEK \sim \triangle ABM \Rightarrow \widehat{AKE} = \widehat{AMB}$	
Ta có $BCEF$ nội tiếp đường tròn tâm M mà K là trung điểm EF nên $MK \perp EF$ $\widehat{MKN} = \widehat{MDN} = 90^\circ \Rightarrow MDKN$ nội tiếp	0,25 điểm
$\Rightarrow \widehat{DKN} + \widehat{DMN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DKN} + \widehat{AKN} = 180^\circ$ Vậy ba điểm A, K, D thẳng hàng.	0,25 điểm
b) Cách 1. $\triangle QAB \sim \triangle QCA$ (g-g) $\Rightarrow \frac{QB}{QA} = \frac{QA}{QC} = \frac{AB}{AC}$ Do đó $\frac{QB}{QC} = \frac{QB}{QA} \cdot \frac{QA}{QC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (3)	0,25 điểm
$\frac{S_{AKF}}{S_{ADB}} = \frac{S_{AKF}}{S_{ADF}} \cdot \frac{S_{ADF}}{S_{ADB}} = \frac{AK}{AD} \cdot \frac{AF}{AB}$; $\frac{S_{AKE}}{S_{ADC}} = \frac{S_{AKE}}{S_{ADE}} \cdot \frac{S_{ADE}}{S_{ADC}} = \frac{AK}{AD} \cdot \frac{AE}{AC}$	0,25 điểm
mà $S_{AKE} = S_{AKF}$ $\frac{DB}{DC} = \frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{S_{ADB}}{S_{AKF}} \cdot \frac{S_{AKE}}{S_{ADC}} = \frac{AD}{AK} \cdot \frac{AB}{AF} \cdot \frac{AK}{AD} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (4)	0,25 điểm
Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{QB}{QC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow QB \cdot DC = QC \cdot DB$	0,25 điểm
Cách 2. Từ D kẻ đường thẳng song song với EF cắt AB, AC lần lượt tại J, L Vì K là trung điểm EF nên D là trung điểm JL $\widehat{ACB} = \widehat{AFE} = \widehat{QAB} \Rightarrow EF \parallel AQ \Rightarrow JL \parallel AQ$ Ta có $JL \parallel AQ \Rightarrow \frac{QB}{DB} = \frac{QA}{DJ} = \frac{QA}{DL} = \frac{QC}{CD} \Rightarrow QB \cdot DC = QC \cdot DB$	1,0 điểm
Bài 4. (1,5 điểm)	
Số nguyên dương n được gọi là số đẹp nếu tồn tại các số nguyên a, b sao cho $n = a^2 + 7b^2$.	
a) Tìm hai số đẹp có hai chữ số và chia hết cho 11.	1,5 điểm
b) Chứng minh rằng nếu n là số đẹp và n chia hết cho 11 thì $\frac{n}{11}$ cũng là số đẹp .	
a) Tìm được hai số trong các số 11; 44; 77; 88; 99.	0,5 điểm
b) Ta có $n = a^2 + 7b^2 = a^2 + 11b^2 - 4b^2 : 11 \Rightarrow a^2 - 4b^2 : 11 \Rightarrow \begin{cases} a - 2b : 11 \\ a + 2b : 11 \end{cases}$	0,25 điểm
Vì $n = a^2 + 7b^2 = a^2 + 7(-b)^2$ nên ta chỉ cần xét một trường hợp $a - 2b : 11$	
$\frac{n}{11} = \frac{11(a^2 + 7b^2)}{121} = \frac{(2a + 7b)^2 + 7(a - 2b)^2}{121}$	0,5 điểm
Mà $2a + 7b = 2(a - 2b) + 11b$ và $a - 2b : 11$	
Nên $\frac{n}{11} = x^2 + 7y^2$ với $x = \frac{2a + 7b}{11}$ và $y = \frac{a - 2b}{11}$ là các số nguyên. Vậy $\frac{n}{11}$ là số đẹp .	0,25 điểm

Bài 5. (1,5 điểm)	
a) Gọi S là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 100. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên a thuộc tập S . Tính xác suất sao cho số a được chọn thỏa mãn các nghiệm của phương trình $x^2 - ax + 2a + 10 = 0$ đều là số nguyên.	1,0 điểm
Số các kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = 201$.	0,25 điểm
$\Delta = a^2 - 8a - 40 \geq 0$ Gọi m, n là hai nghiệm nguyên của phương trình ($m \geq n$). Theo hệ thức Vi-ét $\begin{cases} m + n = a \\ mn = 2a + 10 \end{cases}$	0,25 điểm
$mn = 2(m + n) + 10 \Rightarrow (m - 2)(n - 2) = 14$.	0,5 điểm
TH1: $\begin{cases} m - 2 = 14 \\ n - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 16 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 19$ (nhận)	
TH2: $\begin{cases} m - 2 = 7 \\ n - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 13$ (nhận)	
TH3: $\begin{cases} m - 2 = -2 \\ n - 2 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -5 \end{cases} \Rightarrow a = -5$ (nhận)	
TH4: $\begin{cases} m - 2 = -1 \\ n - 2 = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -12 \end{cases} \Rightarrow a = -11$ (nhận)	
Suy ra số kết quả thuận lợi của biến cố là 4	0,5 điểm
Vậy xác suất cần tìm là $\frac{4}{201}$.	
b) Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 100\}$ và tập hợp B là tập hợp con chứa 11 phần tử của tập hợp A . Chứng minh rằng tập hợp B luôn chứa ba số a, b, c phân biệt sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.	0,5 điểm
Gọi $a_i, i = \overline{1, 11}$ với $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{11}$ là các phần tử của tập hợp B Giả sử các phần tử của tập B đều không có bộ 3 số nào là độ dài ba cạnh của một tam giác	0,25 điểm
Do $a_1 \geq 1$ nên $a_2 \geq 2$ và $a_3 \geq a_1 + a_2 = 3$ $a_4 \geq a_2 + a_3 = 5, \dots, a_{11} \geq a_{10} + a_9 = 89 + 55 = 144$ (vô lý)	0,25 điểm
Vậy B luôn chứa ba số a, b, c phân biệt sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.	

-HẾT-



KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 09/6/2024

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ và $B = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

2) Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.

3) Tìm tất cả giá trị của x để $A - B < 0$.

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Đề chờ 15 tấn thiết bị phục vụ Lễ kỷ niệm 70 năm chiến thắng Điện Biên Phủ, một đội vận chuyển dự định sử dụng các xe tải loại nhỏ. Do thay đổi kế hoạch, đội vận chuyển quyết định chỉ sử dụng các xe tải loại lớn. Vì vậy, số xe tải sử dụng giảm đi 2 xe so với dự định và mỗi xe tải loại lớn chở nhiều hơn mỗi xe tải loại nhỏ là 2 tấn. Hỏi đội vận chuyển sử dụng bao nhiêu xe tải loại lớn? (Biết mỗi xe tải cùng loại đều chở số tấn thiết bị bằng nhau).

2) Một bình đựng nước có dạng hình trụ với bán kính đáy là 4 cm và chiều cao là 25 cm. Tính diện tích xung quanh của bình đựng nước đó (lấy $\pi \approx 3,14$).

Câu III (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x+1} + 2y = 4 \\ 3\sqrt{3x+1} - y = 5 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m-2)x + 5$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) . Tìm tất cả giá trị của m để $x_1 + 5x_2 = 0$.

Câu IV (3,0 điểm)

Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm).

1) Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

2) Vẽ đường kính BD của đường tròn (O) . Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD và đường tròn (O) . Đường thẳng BC và đường thẳng AO cắt nhau tại H . Chứng minh $AB^2 = AE \cdot AD = AH \cdot AO$ và $\widehat{HDO} = \widehat{HBE}$.

3) Lấy điểm M thuộc tia đối của tia CB . Gọi N là chân đường vuông góc kẻ từ điểm M đến đường thẳng AB . Chứng minh đường thẳng BE đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN .

Câu V (0,5 điểm)

Với các số thực dương x và y thỏa mãn $x + y + xy = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3}{x+y} - xy.$$

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1:

Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:



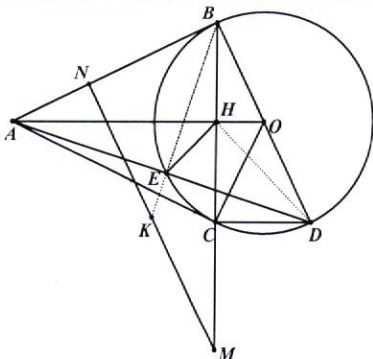
ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM CHO ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 09/6/2024

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu I 2,0 điểm	1)	Thay $x = 16$ (TMĐK) vào biểu thức A , tính được $A = 16$.	0,5
	2)	Ta có $B = \frac{2x-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $= \frac{2x-3-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$	1,0
	3)	Ta có $A - B = \frac{x}{\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-3}$ $A - B < 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}-1)^2 > 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases}$ (do $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$). Kết hợp điều kiện ta có $0 < x < 9$ và $x \neq 1$.	0,5
Câu II 2,0 điểm	1)	Gọi số xe tải loại lớn đội vận chuyển sử dụng là x (xe) ($x \in \mathbb{N}^*$). Mỗi xe tải loại lớn chở $\frac{15}{x}$ (tấn). Mỗi xe tải loại nhỏ chở $\frac{15}{x+2}$ (tấn). Ta có phương trình: $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+2} = 2$. Giải phương trình tìm được hai nghiệm $x_1 = 3, x_2 = -5$. Đối chiếu điều kiện ta được $x = 3$. Vậy đội vận chuyển sử dụng 3 xe tải loại lớn.	1,5
	2)	Diện tích xung quanh của bình đựng nước là: $S_{xq} = 2\pi Rh \approx 2.3,14.4.25 = 628 (\text{cm}^2)$.	0,5
Câu III 2,5 điểm	1)	Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$. $\begin{cases} \sqrt{3x+1} + 2y = 4 \\ 3\sqrt{3x+1} - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} + 2y = 4 \\ 7\sqrt{3x+1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} + 2y = 4 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ Đối chiếu với điều kiện, ta được hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 1)$.	1,0
	2a)	Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) : $x^2 = (m-2)x + 5 \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - 5 = 0. \quad (*)$ Tính được $\Delta = (m-2)^2 + 20$, suy ra $\Delta > 0$ với mọi m . Từ đó phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.	0,75



		Ta có $x_1 + 5x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5x_2$. Kết hợp với $x_1x_2 = -5$ (Hệ thức Vi-et) ta có $x_2^2 = 1$. 2b) TH1: $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -5$. Kết hợp với $x_1 + x_2 = m - 2$ (Hệ thức Vi-et) $\Rightarrow m = -2$. TH2: $x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = 5$. Kết hợp với $x_1 + x_2 = m - 2 \Rightarrow m = 6$. Vậy $m = -2$ hoặc $m = 6$.	0,75
		Vì AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$. 1) Xét tứ giác $ABOC$ có: $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$. Hai góc $\widehat{ABO}$ và $\widehat{ACO}$ là hai góc đối nhau nên tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.	1,0
			
Câu IV 3,0 điểm	2)	+) Ta có BD là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{BED} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AD$. Xét tam giác vuông ABD có BE là đường cao nên $AB^2 = AE.AD$. Lại có $AB = AC, OB = OC$ nên đường thẳng AO là trung trực của đoạn thẳng $BC \Rightarrow AO \perp BC$. Xét tam giác vuông ABO có đường cao BH nên $AB^2 = AH.AO$. Vậy $AB^2 = AE.AD = AH.AO$. +) Ta có $OH.OA = OB^2 = OD^2$ dẫn tới $\triangle ODH \sim \triangle OAD(c.g.c)$ $\Rightarrow \widehat{HDO} = \widehat{DAO}$. (1) Xét tứ giác $ABHE$ có $\widehat{AHB} = \widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ABHE$ nội tiếp, dẫn tới $\widehat{EBH} = \widehat{EAH}$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HDO} = \widehat{HBE}$.	1,5
	3)	Gọi K là giao điểm của BE và MN. Ta có $BD \parallel MN \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{BMN}$. Xét $\triangle BHD$ và $\triangle MKB$ có $\widehat{DBC} = \widehat{BMN}, \widehat{BDH} = \widehat{KBM}$ $\Rightarrow \triangle BHD \sim \triangle MKB(g.g) \Rightarrow \frac{BH}{MK} = \frac{BD}{BM}$. Xét hai tam giác vuông BCD và MNB có $\widehat{CBD} = \widehat{BMN}$ $\Rightarrow \triangle BCD \sim \triangle MNB(g.g) \Rightarrow \frac{BC}{MN} = \frac{BD}{BM}$. Từ đó dẫn tới $\frac{BH}{MK} = \frac{BC}{MN} \left(= \frac{BD}{BM} \right)$. Mà $BH = \frac{1}{2}BC \Rightarrow MK = \frac{1}{2}MN \Rightarrow K$ là trung điểm của MN.	0,5
Câu V 0,5 điểm		Ta có $(x+y)^2 \geq 4xy = 4[3-(x+y)] \Rightarrow (x+y)^2 + 4(x+y) - 12 \geq 0$ $\Rightarrow (x+y+6)(x+y-2) \geq 0$. Mà x, y là các số dương nên $x+y+6 > 0$. Do đó $x+y \geq 2$. Từ đó $P = \frac{3}{x+y} + x+y-3 = \frac{4}{x+y} + (x+y) - \frac{1}{x+y} - 3 \geq 2\sqrt{4} - \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$ khi $x = y = 1$.	0,5

Chú ý: Các cách làm khác của học sinh ở mỗi câu hỏi nếu đúng vẫn được điểm tối đa.

-----HẾT-----